

## 2. Krogelne koordinate

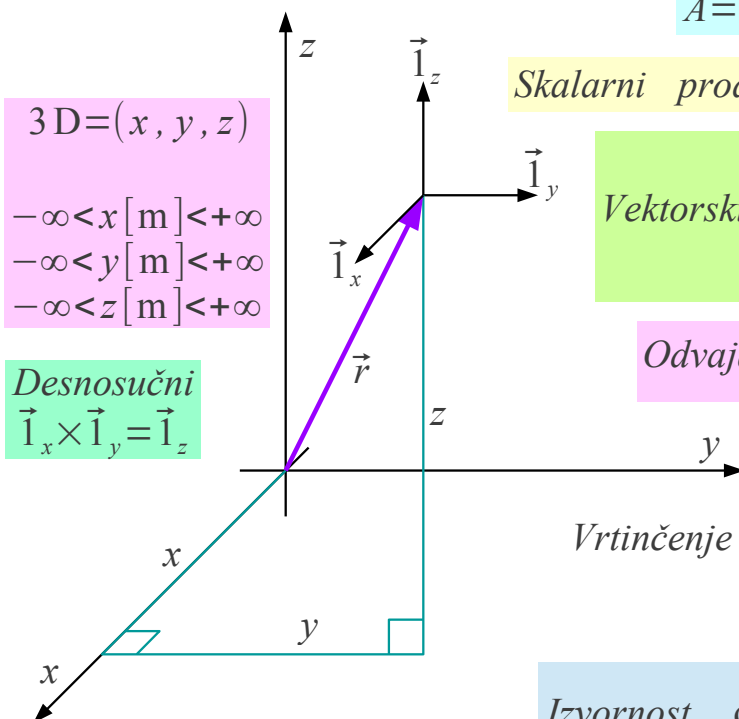
Večina nalog iz anten in razširjanje valov zahteva obravnavo v treh dimenzijah prostora. Tako skalarne kot vektorske veličine so funkcije časa in vseh treh dimenzij prostora. Ozkopasovne signale  $B \ll f$  radia največkrat smemo v izračunih ponazoriti s harmonskim signalom ene same krožne frekvence  $\omega = 2\pi f$ , kar poenostavi časovne odvode v  $\partial/\partial t = j\omega$ .

Računanje s skalarnimi in vektorskimi funkcijami treh dimenzij prostora se da poenostaviti s koordinatnim sistemom, ki ima naslednje lastnosti:

- 1) tri dimenzije (3D),
- 2) pravokotnost med koordinatnimi osmi (pravokotni) in
- 3) vgrajeno pravilo desnega vijaka (desnosučni).

Od primernih koordinatnih sistemov je najpreprostejši kartezični koordinatni sistem:

Kartezične koordinate



3D = (x, y, z)

$-\infty < x [\text{m}] < +\infty$   
 $-\infty < y [\text{m}] < +\infty$   
 $-\infty < z [\text{m}] < +\infty$

Desnosučni

$\vec{i}_x \times \vec{i}_y = \vec{i}_z$

Komponente

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = \vec{i}_x A_x + \vec{i}_y A_y + \vec{i}_z A_z$$

Skalarni produkt  $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

Vektorski produkt

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Odvajanje  $\nabla = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$

Vrtinčenje

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Izvornost

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Pravokotni

$\vec{i}_x \perp \vec{i}_y \perp \vec{i}_z \perp \vec{i}_x$

Smerni odvod

$$\text{grad } T = \nabla T = \vec{i}_x \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

Kartezični koordinatni sistem ima tri ravne koordinatne osi. Vse tri koordinatne osi imajo merske enote razdalje, običajno so to metri  $[m]$ . Odvajanje po koordinatah torej pomeni neposredno odvajanje po razdaljah. Spoštovanje vrstnega reda pisanja koordinat  $(x, y, z)$  ohranja desnosučnost.

Posebnost kartezičnega koordinatnega sistema so konstantni enotni smerni vektorji  $\vec{1}_x$ ,  $\vec{1}_y$  in  $\vec{1}_z$ , ki so neodvisni od položaja v prostoru  $\vec{r} = (x, y, z)$ . Pri računanju odvodov se smerniki  $\vec{1}_x$ ,  $\vec{1}_y$  in  $\vec{1}_z$  kartezičnega koordinatnega sistema obnašajo kot konstante, kar znatno poenostavi računanje.

Odvajanje vektorskih in skalarnih funkcij v prostoru lahko zapišemo z operaterjem  $\nabla$ , ki ima v kartezičnih koordinatah preprost zapis. Vrtinčenje vektorskega polja tedaj računamo kot  $\text{rot } \vec{F}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{F}(\vec{r})$ , izvornost vektorskega polja kot  $\text{div } \vec{F}(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{F}(\vec{r})$  in smerni odvod skalarnega polja kot  $\text{grad } T(\vec{r}) = \nabla T(\vec{r})$ .

Kartezični koordinatni sistem uporabimo tudi za opis oziroma definicijo vseh drugih 3D, pravokotnih in desnosučnih koordinatnih sistemov. kartezični koordinatni sistem pogosto uporabljamo kot vmesno stopnjo pri pretvorbi poljubnega koordinatnega sistema v drugačen poljubni koordinatni sistem. Končno, ker so smerniki  $\vec{1}_x$ ,  $\vec{1}_y$  in  $\vec{1}_z$  kartezičnega koordinatnega sistema konstantni vektorji, z njihovo pomočjo najbolj preprosto računamo odvode smernikov drugih koordinatnih sistemov.

Kartezični koordinatni sistem žal ni najprimernejši za opis točkastih virov valovanja, na primer katerekoli antene na velikih razdaljah  $r \gg d$ . Za takšno nalogo je primernejši krogelni koordinatni sistem. Najbolj znan krogelni koordinatni sistem je zemljepisni koordinatni sistem. Koordinate zemljepisna dolžina  $\lambda[^\circ]$ , zemljepisna širina  $\phi[^\circ]$  in nadmorska višina  $h[m]$  tvorijo v zaporedju  $(\lambda, \phi, h)$  3D, pravokotni in desnosučni koordinatni sistem.

Zemljepisni koordinatni sistem ima nekaj pomanjkljivosti. Zapis koordinat v stopinjah  $[^\circ]$  prinaša nerodnosti pri odvajanju kotnih funkcij. Nadmorski višini je treba vsaj prišteti polmer Zemlje, če slednjo smemo poenostaviti kot kroglo s polmerom  $R_Z \approx 6378 \text{ km}$ .

Pri antenah pogosteje uporabljamo krogelni koordinatni sistem  $(r, \Theta, \Phi)$ , kjer je  $r[m]$  oddaljenost od izhodišča v enotah razdalje (metri),  $\Theta[rd]$  je polarna razdalja (kot) v radianih in  $\Phi[rd]$  je zemljepisna dolžina (kot) v radianih. Krogelne koordinate pisane v zaporedju  $(r, \Theta, \Phi)$  tvorijo 3D, pravokotni in desnosučni koordinatni sistem:

Krogelne koordinate (tečaj z)

Pretvorba  $(r, \Theta, \Phi) \rightarrow (x, y, z)$

$$3D = (r, \Theta, \Phi)$$

$$0 \leq r[m] < +\infty$$

$$0 \leq \Theta[rd] \leq \pi$$

$$0 \leq \Phi[rd] < 2\pi$$

$$x = r \sin \Theta \cos \Phi$$

$$y = r \sin \Theta \sin \Phi$$

$$z = r \cos \Theta$$

$$\vec{l}_x = \vec{l}_r \sin \Theta \cos \Phi + \vec{l}_\Theta \cos \Theta \cos \Phi - \vec{l}_\Phi \sin \Phi$$

$$\vec{l}_y = \vec{l}_r \sin \Theta \sin \Phi + \vec{l}_\Theta \cos \Theta \sin \Phi + \vec{l}_\Phi \cos \Phi$$

$$\vec{l}_z = \vec{l}_r \cos \Theta - \vec{l}_\Theta \sin \Theta$$

$$0 \leq \Theta \leq \pi \rightarrow \sin \Theta \geq 0$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Pretvorba  $(x, y, z) \rightarrow (r, \Theta, \Phi)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Theta = \arccos(z / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

$$\Phi = \arctan(y/x) \quad (\text{kvadrant?})$$

$$\vec{l}_r = \vec{l}_x \sin \Theta \cos \Phi + \vec{l}_y \sin \Theta \sin \Phi + \vec{l}_z \cos \Theta$$

$$\vec{l}_\Theta = \vec{l}_x \cos \Theta \cos \Phi + \vec{l}_y \cos \Theta \sin \Phi - \vec{l}_z \sin \Theta$$

$$\vec{l}_\Phi = -\vec{l}_x \sin \Phi + \vec{l}_y \cos \Phi$$

$$\text{Pravokotni} \quad \vec{l}_r \perp \vec{l}_\Theta \perp \vec{l}_\Phi \perp \vec{l}_r$$

$$\text{Desnosučni} \quad \vec{l}_r \times \vec{l}_\Theta = \vec{l}_\Phi$$

Severni tečaj  $\Theta=0$  krogelnega koordinatnega sistema najpogosteje izberemo v smeri osi  $z$  kartezičnega koordinatnega sistema. Ekvatorialna ravnina krogelnega koordinatnega sistema  $\Theta=\pi/2$  tedaj ustreza ravnini  $xy$  oziroma  $z=0$  kartezičnega koordinatnega sistema. Oddaljenost od izhodišča  $r \geq 0$  vzamemo vedno pozitivno ali enako nič, polarna razdalja pa se giblje v mejah  $0 \leq \Theta \leq \pi$  od severnega do južnega tečaja.

Vsi krogelni koordinatni sistemi so krivočrtni koordinatni sistemi. Poldnevnik in vzporedniki so krožni loki. Vsi trije smerni vektorji  $\vec{l}_r$ ,  $\vec{l}_\Theta$  in  $\vec{l}_\Phi$  pri premikanju vzdolž poldnevnikov oziroma vzporednikov spreminjajo svojo smer! Smernike krogelnega

koordinatnega sistema  $\vec{1}_r$ ,  $\vec{1}_\Theta$  in  $\vec{1}_\Phi$  kot tudi obojestransko povezavo s smerniki kartezičnega koordinatnega sistema  $\vec{1}_x$ ,  $\vec{1}_y$  in  $\vec{1}_z$  je zato smiselno zapisati s kotnimi funkcijami polarne razdalje  $\Theta$  in zemljepisne dolžine  $\Phi$ .

Ker smerniki krogelnega koordinatnega sistema  $\vec{1}_r$ ,  $\vec{1}_\Theta$  in  $\vec{1}_\Phi$  niso konstante, operator odvajanja  $\nabla$  nima preprostega zapisa v krogelnih koordinatah. Poleg tega  $\nabla$  odreja po razdalji, koordinati  $\Theta$  in  $\Phi$  pa nimata merskih enot razdalje. Pri izračunu odvodov v krivočrtnem koordinatnem sistemu si pomagamo z Laméjevimi koeficienti oziroma faktorji skale:

$$\text{Laméjevi koeficienti } (q_1, q_2, q_3) \quad h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \quad i=1,2,3$$

$$\text{Kroglne koordinate } (r, \Theta, \Phi) \quad h_r=1 \quad h_\Theta=r[\text{m/rd}] \quad h_\Phi=r \sin \Theta[\text{m/rd}]$$

*Smerni odvod*

$$\text{grad } T = \vec{1}_{q1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial q_1} + \vec{1}_{q2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T}{\partial q_2} + \vec{1}_{q3} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T}{\partial q_3} = \vec{1}_r \frac{\partial T}{\partial r} + \vec{1}_\Theta \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \Theta} + \vec{1}_\Phi \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial T}{\partial \Phi}$$

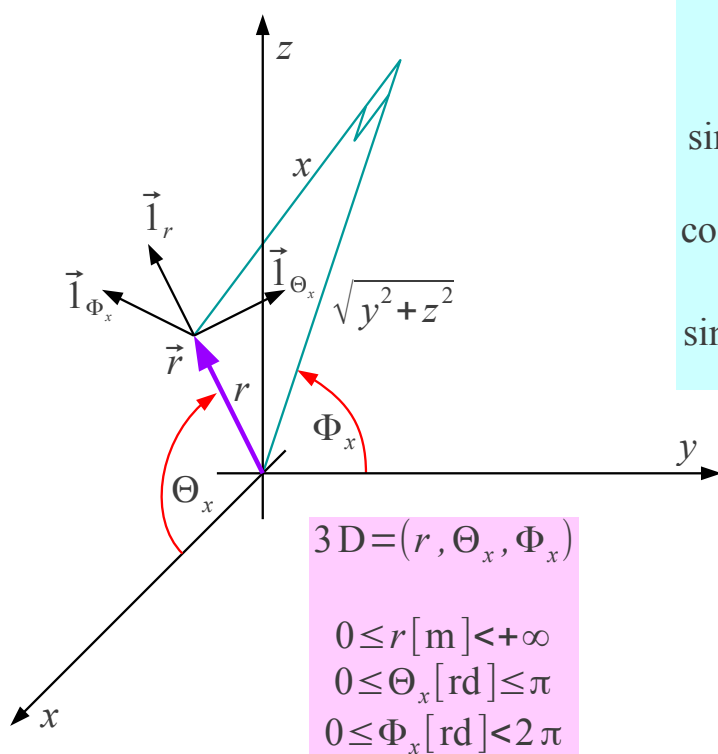
$$\begin{aligned} \text{Izvornost} \quad \text{div } \vec{F} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial (h_2 h_3 F_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (h_1 h_3 F_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 F_3)}{\partial q_3} \right] = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial (\sin \Theta F_\Theta)}{\partial \Theta} + \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial F_\Phi}{\partial \Phi} \end{aligned}$$

*Vrtinčenje*

$$\text{rot } \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{1}_{q1} & h_2 \vec{1}_{q2} & h_3 \vec{1}_{q3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \begin{vmatrix} \vec{1}_r & r \vec{1}_\Theta & r \sin \Theta \vec{1}_\Phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \Theta} & \frac{\partial}{\partial \Phi} \\ F_r & r F_\Theta & r \sin \Theta F_\Phi \end{vmatrix}$$

Odvajanje v krogelnih koordinatah

## Kroglne koordinate - tečaj x



$$0 \leq \Theta_x \leq \pi \rightarrow \sin \Theta_x = \sqrt{1 - \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi} \geq 0$$

Pretvorba  $(r, \Theta_x, \Phi_x) \rightarrow (r, \Theta, \Phi)$

$$\cos \Theta_x = \frac{x}{r} = \sin \Theta \cos \Phi$$

$$\sin \Theta_x = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{r} = \sqrt{1 - \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi}$$

$$\cos \Phi_x = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{\sin \Theta \sin \Phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi}}$$

$$\sin \Phi_x = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{\cos \Theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi}}$$

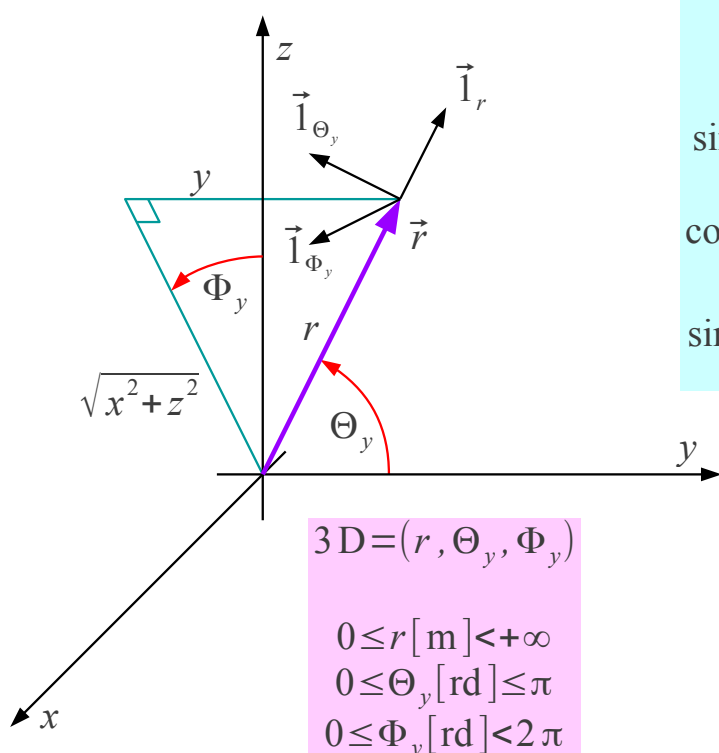
Smerniki

$$\vec{1}_r = \vec{1}_r$$

$$\vec{1}_{\Theta_x} = \frac{-\vec{1}_{\Theta} \cos \Theta \cos \Phi + \vec{1}_{\Phi} \sin \Phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi}}$$

$$\vec{1}_{\Phi_x} = \frac{-\vec{1}_{\Theta} \sin \Phi - \vec{1}_{\Phi} \cos \Theta \cos \Phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi}}$$

## Kroglne koordinate - tečaj y



$$0 \leq \Theta_y \leq \pi \rightarrow \sin \Theta_y = \sqrt{1 - \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi} \geq 0$$

Pretvorba  $(r, \Theta_y, \Phi_y) \rightarrow (r, \Theta, \Phi)$

$$\cos \Theta_y = \frac{y}{r} = \sin \Theta \sin \Phi$$

$$\sin \Theta_y = \frac{\sqrt{x^2 + z^2}}{r} = \sqrt{1 - \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi}$$

$$\cos \Phi_y = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{\cos \Theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi}}$$

$$\sin \Phi_y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{\sin \Theta \cos \Phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi}}$$

Smerniki

$$\vec{i}_r = \vec{i}_r$$

$$\vec{i}_{\Theta_y} = \frac{-\vec{i}_{\Theta} \cos \Theta \sin \Phi - \vec{i}_{\Phi} \cos \Phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi}}$$

$$\vec{i}_{\Phi_y} = \frac{\vec{i}_{\Theta} \cos \Phi - \vec{i}_{\Phi} \cos \Theta \sin \Phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi}}$$

\*\*\*\*\*