

Frekvenčni prostor in kazalci

Obravnava elektrotehnične naloge je v časovnem prostoru povsem nazorna. Trenutne fizikalne veličine, na primer napetost $u(t)$ in tok $i(t)$, so natančno tisto, kar vidimo na zaslonu osciloskopa. Časovno odvisnost namenoma poudarimo z zapisom veličin z malimi črkami. Reševanje enačb tudi s povsem linearnimi gradniki žal v časovnem prostoru ni preprosto. Obnašanje gradnikov, ki lahko hranijo energijo, na primer tuljav L oziroma kondenzatorjev C , opisujejo odvodi oziroma integrali vpletenih veličin.

Matematiki se reševanju linearnih enačb z odvodi in integrali spretno izognejo z integralskimi transformacijami. Obnašanju linearnega vezja pri krmiljenju s harmonskimi (sinusnimi) signali se dobro prilega Fourier-jeva transformacija v frekvenčni prostor s krožno (realno) frekvenco ω . Za obravnavo prehodnih pojavov v linearnih vezjih je primernejša Laplace-jeva transformacija s kompleksno frekvenco $s = \sigma + j\omega$. V obeh primerih se časovni odvodi oziroma integrali preslikajo v množenje oziroma deljenje s frekvenco:

Časovni prostor

Fourier

Laplace

$$f(t)$$



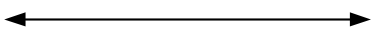
$$F(\omega) = \int f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$F(s) = \int f(t) e^{-st} dt$$

$$j = \sqrt{-1}$$

$$s = \sigma + j\omega$$

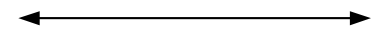
$$\frac{d}{dt} f(t)$$



$$j\omega \cdot F(\omega)$$

$$s \cdot F(s)$$

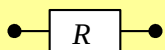
$$\int f(t) dt$$



$$\frac{1}{j\omega} \cdot F(\omega)$$

$$\frac{1}{s} \cdot F(s)$$

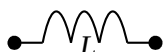
$$u(t) = R \cdot i(t)$$



$$U(\omega) = R \cdot I(\omega)$$

$$U(s) = R \cdot I(s)$$

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$



$$U(\omega) = j\omega L \cdot I(\omega)$$

$$U(s) = sL \cdot I(s)$$

$$u(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt$$



$$U(\omega) = \frac{1}{j\omega C} \cdot I(\omega)$$

$$U(s) = \frac{1}{sC} \cdot I(s)$$

Jasno moramo pri kateremkoli integriranju meje postaviti tako, da je na

mejah integracije energija v gradnikih, tuljavah L in kondenzatorjih C enaka nič oziroma upoštevana v dodatnih integracijskih konstantah. Pri uporabi integralni transformacij se jasno vprašamo, kaj v resnici pomenijo nove veličine, spektri $I(\omega)$ in $U(\omega)$ oziroma $I(s)$ in $U(s)$ v pripadajočem frekvenčnem prostoru ter kako jih izmerimo?

Najpreprostejši zgled je krmiljenje vezja s harmonskim virom ene same frekvence ω . Izmenično napetost $u(t)$ tedaj opisujeta dva realna podatka: amplituda U in pripadajoči fazni kot φ_U . Izraz $\cos(\omega t + \varphi_U)$ lahko zapišemo tudi kot realni del kompleksne eksponentne funkcije. Oba realna podatka U in φ_U , ki imata jasno določen fizikalni pomen, združimo v eno samo kompleksno število \hat{U} , ki ga imenujemo kazalec (angleško: phasor) napetosti:

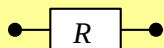
$$u(t) = U \cdot \cos(\omega t + \varphi_U) = \operatorname{Re}[U \cdot e^{j\varphi_U} \cdot e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\hat{U} \cdot e^{j\omega t}]$$

$$i(t) = I \cdot \cos(\omega t + \varphi_I) = \operatorname{Re}[I \cdot e^{j\varphi_I} \cdot e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\hat{I} \cdot e^{j\omega t}]$$

Kazalci

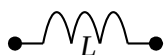
$$\hat{U} = U \cdot e^{j\varphi_U}$$

$$\hat{I} = I \cdot e^{j\varphi_I}$$



$$u(t) = R \cdot i(t) = \operatorname{Re}[R \cdot \hat{I} \cdot e^{j\omega t}]$$

$$\hat{U} = R \cdot \hat{I}$$



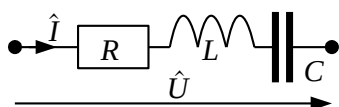
$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = \operatorname{Re}[L \cdot \hat{I} \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}]$$

$$\hat{U} = j\omega L \cdot \hat{I}$$



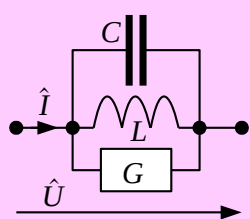
$$u(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{C} \cdot \hat{I} \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot e^{j\omega t}\right]$$

$$\hat{U} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \hat{I}$$



$$\hat{U} = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) \cdot \hat{I} = Z \cdot \hat{I}$$

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + jX$$



$$\hat{I} = \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L} + G\right) \cdot \hat{U} = Y \cdot \hat{U}$$

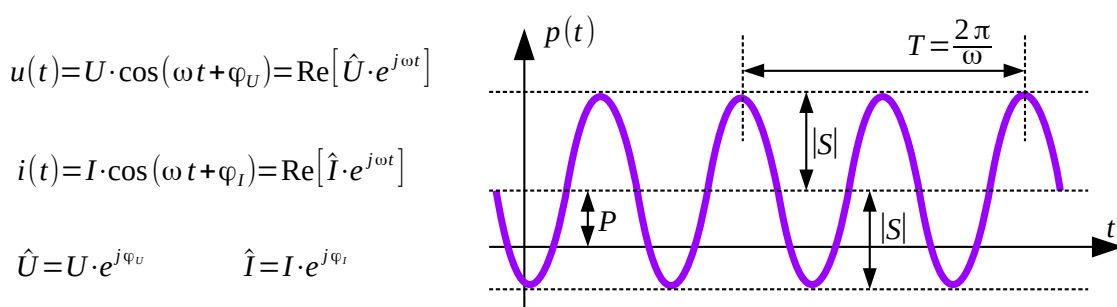
$$G = 1/R$$

$$Y = j\omega C + \frac{1}{j\omega L} + G = G + jB$$

Računanje s kazalci \hat{U} in \hat{I} postane z izjemo uporabe kompleksnih števil silno enostavno. Časovne odvode oziroma integrale zamenja množenje oziroma deljenje z $j\omega$. Integracijske konstante, energije v tuljavah L in v kondenzatorjih C , smemo zanemariti, saj pri eni sami frekvenci ω opazujemo ustaljeno (stacionarno) stanje vezja, ko je kakršenkoli prehodni pojav že izzvenel.

Pri računu s kazalci je smiselno uvesti nova pojma impedance Z in admittance Y . Impedanca Z je kompleksna upornost, ki vključuje realno upornost R in imaginarno reaktanco jX . Admitanca Y je kompleksna prevodnost, ki vključuje realno prevodnost G in imaginarno susceptanco jB . Imaginarni veličini reaktanca jX oziroma susceptanca jB opisujeta gradnike, ki hranijo energijo: tuljave L in kondenzatorje C . Takšne gradnike imenujemo reaktivni gradniki.

Preprost račun s kazalci oziroma spektri integralskih transformacij odpove, ko trčimo ob nelinearno nalogo. Najpogostejša nelinearna naloga je izračun moči. V časovnem prostoru je trenutna moč $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ zmnožek trenutne napetosti in toka. Pri harmonskem krmiljenju trenutna moč niha z dvakratno frekvenco 2ω kot posledica kvadratne naloge, množenja napetosti in toka. Moč lahko v določenih trenutkih postane tudi negativna, ko tuljave L in kondenzatorji C vračajo vskladiščeno energijo nazaj viru:



$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi_U) \cdot \cos(\omega t + \varphi_I) = \frac{U \cdot I}{2} \cdot [\cos(\varphi_U - \varphi_I) + \cos(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I)]$$

Kompleksna moč

$$S = P + jQ = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}^*}{2} = \frac{U \cdot e^{j\varphi_U} \cdot I \cdot e^{-j\varphi_I}}{2} = \frac{U \cdot I}{2} \cdot e^{j(\varphi_U - \varphi_I)}$$

Navidezna moč

$$|S| = \left| \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}^*}{2} \right| = \frac{U \cdot I}{2} = \frac{p(t_{MAX}) - p(t_{MIN})}{2}$$

Delovna moč

$$P = \langle p(t) \rangle = \operatorname{Re} \left[\frac{\hat{U} \cdot \hat{I}^*}{2} \right] = \frac{U \cdot I}{2} \cdot \operatorname{Re} [e^{j(\varphi_U - \varphi_I)}] = \frac{U \cdot I}{2} \cdot \cos(\varphi_U - \varphi_I)$$

Jalova moč

$$Q = \operatorname{Im} \left[\frac{\hat{U} \cdot \hat{I}^*}{2} \right] = \frac{U \cdot I}{2} \cdot \operatorname{Im} [e^{j(\varphi_U - \varphi_I)}] = \frac{U \cdot I}{2} \cdot \sin(\varphi_U - \varphi_I)$$

Pri računanju s kazalci \hat{U} in \hat{I} je smiselno uvesti nov pojem kompleksne moči $S = P + jQ$. Pri izračunu moči je pomembna razlika med faznim kotom napetosti in toka $\varphi_U - \varphi_I$. Razliko faznega kota dobimo z množenjem kazalca napetosti \hat{U} s konjugirano-kompleksno vrednostjo kazalca toka \hat{I}^* . Ker kazalca \hat{U} in \hat{I}^* vsebujeta amplitudi, torej vršni

vrednosti harmonske napetosti in toka, moramo rezultat za moč deliti z dva!

Realni del kompleksne moči $S = P + jQ$ je delovna moč $P = \langle p(t) \rangle$ oziroma dolgotrajno časovno povprečje trenutne moči. Navidezna moč $|S|$ opisuje amplitudo nihanja trenutne moči $p(t)$ z dvakratno frekvenco 2ω okoli povprečja $P = \langle p(t) \rangle$. Imaginarni del kompleksne moči $S = P + jQ$ je jalova moč Q , torej merilo za vskladiščeno energijo v reaktivnih gradnikih: tuljavah L in kondenzatorjih C .

V elektrodinamiki si pogosto ne moremo privoščiti zgoraj opisanega razkošja črk in oznak frekvenčnega prostora. Ko želimo izrecno poudariti kazalce, pripadajoči veličini \hat{U} in \hat{I} zapisujemo s strešicami nad velikimi črkami, da jih razlikujemo od enosmernih veličin oziroma amplitud U in I . V večini nalog elektrodinamike si razkošja dodatnih strešic ne želimo. Ko za določene veličine natančno vemo, da so kazalci, zanje uporabljamo kar velike črke brez strešic. Na primer, U in I v takšni nalogi pomenita kazalce!

Podobno si ne moremo privoščiti uporabe treh različnih črk P , Q in S samo za zapis kompleksne moči. V elektrodinamiki uporabljamo veliko črko P kar za kompleksno moč. $\text{Re}[P]$ je tedaj delovna moč, $|P|$ navidezna moč in $\text{Im}[P]$ jalova moč. Veliko črko S v elektrodinamiki najpogosteje uporabljamo za gostoto kompleksne moči na enoto površine z merskimi enotami W/m^2 . Realni del, velikost in imaginarni del pomenijo gostoto delovne moči $\text{Re}[S]$, gostoto navidezne moči $|S|$ in gostoto jalove moči $\text{Im}[S]$.

Končno je težava še s kazalci, ki jih nemarneži v tuji literaturi imenujejo kar vektorji namesto pravilnega angleškega izraza phasor. Vektorji so nekaj povsem drugega, potrebujemo jih za opis nekaterih fizikalnih veličin v tridimenzijskih nalogah. V elektrodinamiki pogosto naletimo na veličine, ki so hkrati vektorji in kazalci, na primer izmenično (harmonsko) električno polje \vec{E} . Kaj takrat točno pomeni izraz $|\vec{E}|$, je treba razvozljati iz pripadajočega besedila oziroma smisla naloge: velikost vektorja (kompleksni skalar), velikost kazalca (realni vektor) ali oboje (realni skalar)?

* * * * *