Smith-ov diagram

Podobno kot ostale elektrotehnične naloge lahko prenosne vode obravnavamo v časovnem prostoru oziroma v frekvenčnem prostoru. Obravnava voda v frekvenčnem prostoru je povsem smiselna, ko z vodom prenašamo razmeroma ozkopasovne signale s pasovno širino $\Delta f \ll f_0$ dosti manjšo od osrednje frekvence, kar je pogost primer v radijskih oddajnikih in sprejemnikih. Obravnava izgub prenosnega voda je bolj preprosta v frekvenčnem prostoru. Končno nam obravnava v frekvenčnem prostoru prinese nov vpogled v delovanje prenosnega voda, tako v teoriji kot pri praktičnih meritvah.

V frekvenčnem prostoru, bolj točno pri krmiljenju s harmonskim virom ene same frekvence ω , trenutni veličini napetost $u(z,t)$ in tok $i(z,t)$ zamenjata kazalca napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$. Časovne oziroma frekvenčne odvisnosti posebej ne zapisujemo, saj k vsakemu kazalcu sodi zraven člen $e^{j\omega t}$. Slednjega po dogovoru ne zapisujemo, saj se v linearnih enačbah vedno natančno krajša.

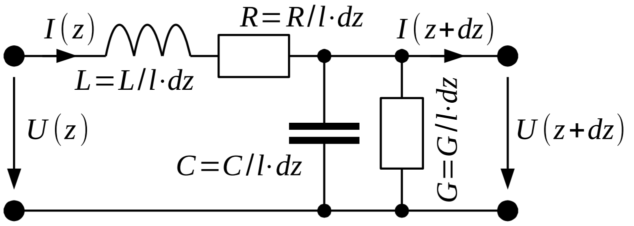
Telegrafsko enačbo prevedemo v frekvenčni prostor tako, da vse odvode po času zapišemo kot $\partial/\partial t = j\omega$. Ostanejo nam seveda odvodi po dolžini z . Kazalca napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$ sta funkciji ene same spremenljivke z , torej lahko delne odvode $\partial/\partial z = d/dz$ pišemo kot navadne odvode.

Pri reševanju sklopljenih diferencialnih enačb za kazalca napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$ uporabimo namig iz časovnega prostora, kjer je prostorska odvisnost zelo podobna funkcija časovni odvisnosti. Enačbi poskusimo rešiti v frekvenčnem prostoru tako, da predpostavimo odvisnost od spremenljivke z v obliki $e^{\mp jkz}$. Pri tem je k lahko poljubna konstanta, tudi kompleksna. Konstanta k ima sicer globlji fizikalni pomen, da si zasluži svoje lastno ime: valovno število.

Z uvedbo valovnega števila k pišemo odvode po dolžini z v obliki $d/dz = \mp jk$. Predznak - ali + izbiramo v frekvenčnem prostoru na povsem enak način kot v časovnem prostoru, torej rešitev za napredujoči ali odbiti val. Drugi odvod po spremenljivki z ima vedno enak predznak $d^2/dz^2 = -k^2$ ne glede na to, ali gre za napredujoči oziroma odbiti val.

Z uvedbo valovnega števila k in poenostavitvijo odvodov po dolžini z postane rešitev telegrafske enačbe v frekvenčnem prostoru silno preprosta, ne glede na to, ali upoštevamo izgube ali ne:

Vod z izgubami



$$\frac{dU(z)}{dz}=-j\omega L/l \cdot I(z)-R/l \cdot I(z)$$

$$\frac{dI(z)}{dz}=-j\omega C/l \cdot U(z)-G/l \cdot U(z)$$

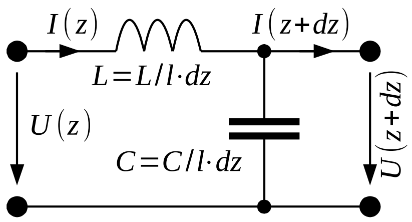
$$\frac{d^2U(z)}{dz^2}=(j\omega L/l+R/l)(j\omega C/l+G/l) \cdot U(z)=-k^2U(z)$$

$$k=\beta-j\alpha=\sqrt{-(j\omega L/l+R/l) \cdot (j\omega C/l+G/l)}$$

$$U(z)=U_N(0) \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}+U_O(0) \cdot e^{+\alpha z} \cdot e^{+j\beta z}$$

$$u(z,t)=Re\left[U_N(0) \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t-\beta z)}+U_O(0) \cdot e^{+\alpha z} \cdot e^{j(\omega t+\beta z)}\right]$$

Brezizgubni vod



$$\frac{d^2U(z)}{dz^2}=-\omega^2 L/l \cdot C/l \cdot U(z)=-k^2U(z)$$

$$k=\beta=\omega\sqrt{L/l \cdot C/l}=\frac{\omega}{v}$$

$$U(z)=U_N(0) \cdot e^{-j\beta z}+U_O(0) \cdot e^{+j\beta z}$$

$$u(z,t)=Re\left[U_N(0) \cdot e^{j(\omega t-\beta z)}+U_O(0) \cdot e^{j(\omega t+\beta z)}\right]$$

Napredujoči val

Odbiti (povratni) val

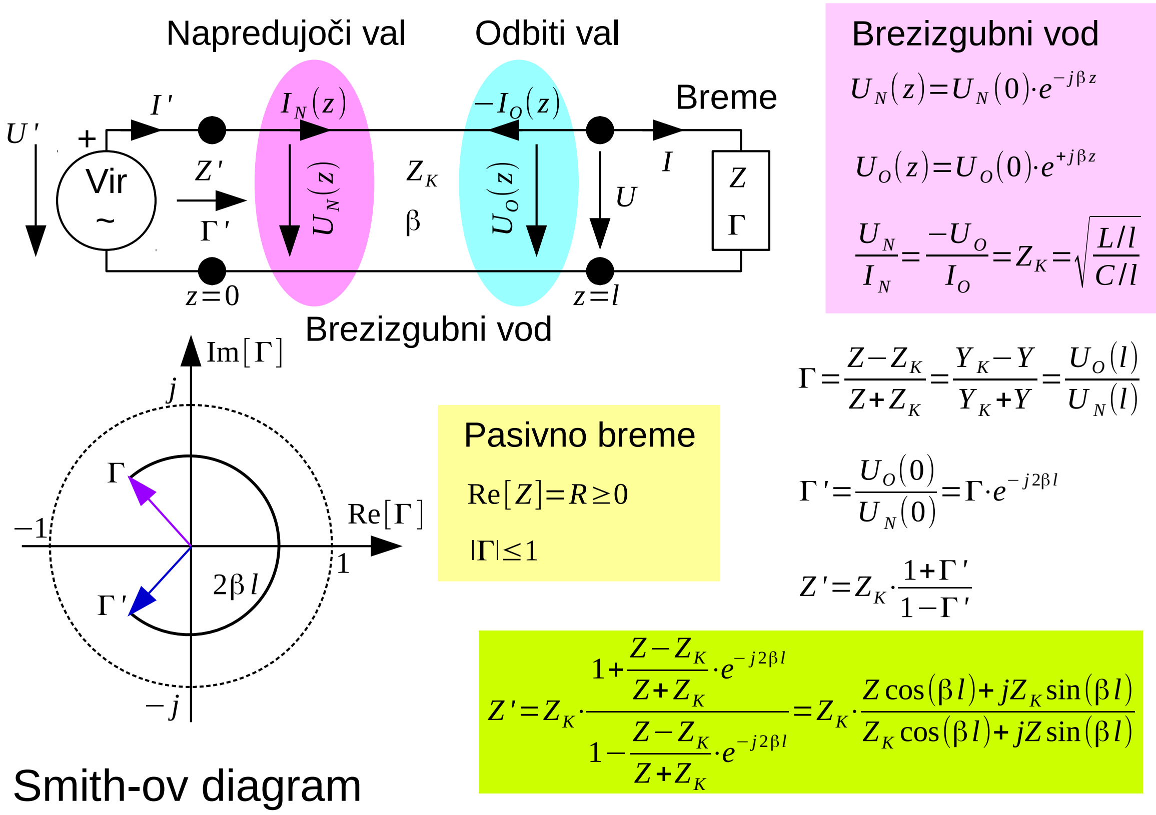
Brezizgubni vod ima povsem realno valovno število k. Valovno število k brezizgubnega voda opisuje samo spreminjanje faze kot funkcija dolžine z. Valovno število je tedaj kar enako fazni konstanti $k=\beta$, ki ima merske enote $\mathrm{rd/m}$ (radiani na meter). Povsem jasno faza napredujočega vala zaostaja z dolžino $e^{-j\beta z}$, faza odbitega vala pa napreduje z dolžino $e^{+j\beta z}$.

Pri krmiljenju s harmonskim virom ene frekvence ω lahko na prenosnem vodu uvedemo pojem valovne dolžine λ. Valovna dolžina je tista razdalja, ko se faza kazalcev napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$ ponovi oziroma naredi polni krog $\beta \cdot \lambda=2\pi$. Valovno dolžino lahko izračunamo iz fazne konstante oziroma iz hitrosti valovanja: $\lambda=2\pi/\beta=2\pi v/\omega=v/f$.

Vod z izgubami ima kompleksno valovno število $k=\beta-j\alpha$. Realni del valovnega števila je tudi v tem primeru fazna konstanta $\beta=\mathrm{Re}[k]$, ki ima povsem enak fizikalni pomen kot pri brezizgubnem vodu. Imaginarni del $\alpha=-\mathrm{Im}[k]$ opisuje slabljenje voda na enoto dolžine v logaritemskih merskih enotah $\mathrm{Np/m}$ (Nepri na meter). Slabljenje napredujočega vala v smeri $+z$ zapišemo kot $e^{-\alpha z}$, slabljenje odbitega vala v smeri $-z$ pa kot $e^{+\alpha z}$.

Na povsem enak način kot v časovnem prostoru tudi v frekvenčnem prostoru poimenujemo razmerje med odbitim in napredujočim valom odbojnost $\Gamma = U_O(z)/U_N(z)$. Razmerje dveh kazalcev je seveda kompleksno število, ki je funkcija položaja $\Gamma = \Gamma(z)$. Na brezizgubnem vodu se spreminjata samo fazi napredujočega vala $U_N(z)$ in odbitega vala $U_O(z)$. Absolutna vrednosti kompleksne odbojnosti $|\Gamma(z)|$ oziroma velikost odbojnosti se vzdolž brezizgubnega voda ne spreminja!

Kompleksno odbojnost Γ na priključnih sponkah bremena izračunamo na podoben način kot v časovnem prostoru, le da upornost bremena R v frekvenčnem prostoru nadomesti impedanca bremena Z. Karakteristično impedanco Z_K brezizgubnega voda izračunamo v frekvenčnem prostoru na povsem enak način kot v časovnem prostoru. Povsem jasno se predznak odbojnosti zamenja pri računanju z dualnimi veličinami, admitanco bremena Y in karakteristično admitanco prenosnega voda Y_K:

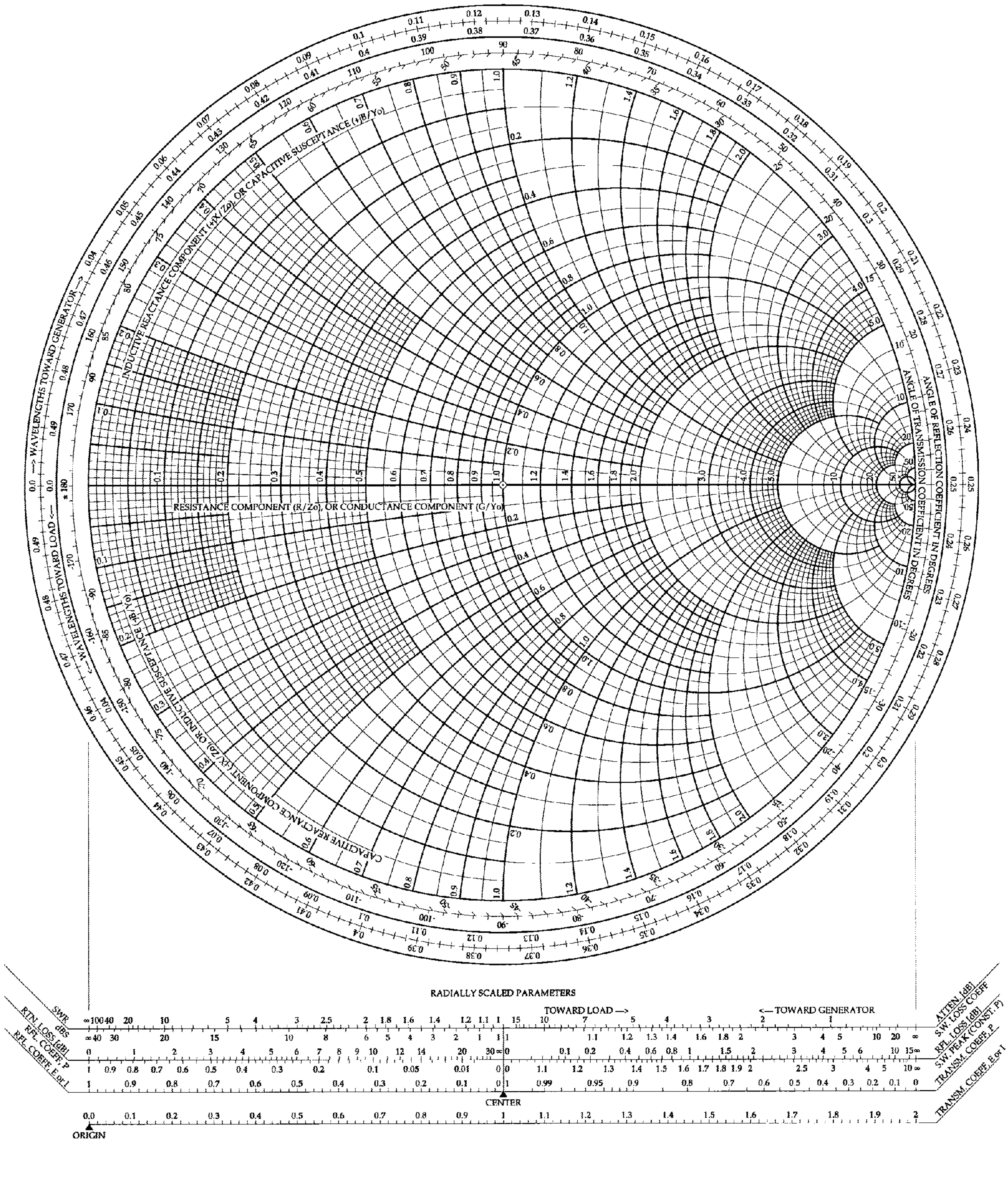


Smith-ov diagram

Kakršnokoli pasivno breme $\mathrm{Re}[Z] = R \geq 0$ ima velikost odbojnosti

$|\Gamma| \leq 1$ vedno manjšo ali enako enoti. Odbojnost kakršnegakoli pasivnega bremena lahko torej prikažemo v kompleksnem diagramu znotraj enotnega kroga! Takšen prikaz odbojnosti imenujemo Smith-ov diagram. Na Smith-ovem diagramu imamo pogosto vrisane tudi krivulje za delovni in reaktivni del impedance $Z=R+jX$ oziroma admitance $Y=G+jB$:

Smith-ov diagram:
impedanca/admitanca v merilu odbojnosti



Velikost odbojnosti $|\Gamma|$ pogosto izražamo v logaritemskih enotah. Veličino $\Gamma_{dB}=20\cdot\log\left(|U_O|/|U_N|\right)=20\cdot\log|\Gamma|$ imenujemo tudi prilagoditev ali povratno slabljenje (angleško: return loss).

Komplicirani računi izmeničnih vezij postanejo v Smith-ovem diagramu silno preprosti. Če med breme in vir vstavimo prenosni vod dolžine l z znano karakteristično impedanco Z_K , se vzdolž voda spreminja samo faza odbojnosti. Bolj točno, odbojnost se zavrti nazaj za dvojni kot $2\beta l$ faze napredujočega oziroma odbitega vala.

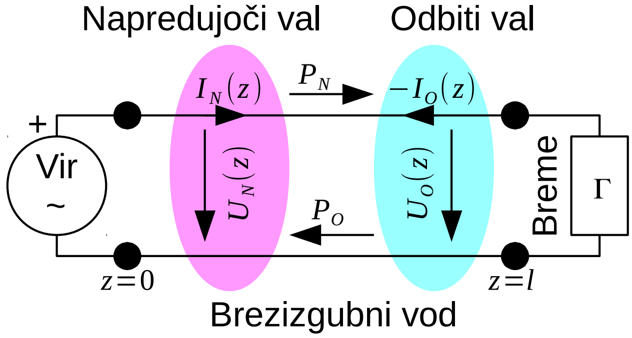
Postopek računanja na brezizgubnem vodu je naslednji. Najprej iz impedance bremena Z določimo odbojnost bremena Γ . Vir vidi preslikano odbojnost $\Gamma'=\Gamma\cdot e^{-j2\beta l}$, kar predstavlja vrtenje odbojnosti v Smith-ovem diagramu. Končno iz preslikane odbojnosti Γ' izračunamo nazaj preslikano impedanco Z' , ki jo občuti vir.

Celotno preslikavo impedance bremena Z v impedanco Z' , ki jo občuti generator, lahko na brezizgubnem vodu zapišemo s preprosto enačbo. Ko je dolžina voda $l=m\cdot\lambda/2$ celoštevilski mnogokratnik polovice valovne dolžine, se impedanca preslika v povsem enako vrednost $Z'=Z$. Odbojnost $\Gamma(z)$ naredi takrat celo število polnih krogov v Smith-ovem diagramu.

Ko je dolžina voda lihi mnogokratnik četrtine valovne dolžine $l=(2m+1)\cdot\lambda/4$, se impedanca invertira $Z'=Z_K^2/Z$. Invertiranje pomeni zasuk za pol kroga v Smith-ovem diagramu. Pri invertiranju se kratki stik $Z=0$ preslika v odprte sponke $Z'=\infty$. Velja tudi obratno, odprte sponke se pri invertiranju z vodom dolžine $\lambda/4$ preslikajo v kratek stik.

Vod dolžine $\lambda/4$, ki ima na enem koncu odprte sponke in je na drugem koncu kratko sklenjen, se obnaša kot vzporedni LC nihajni krog uglašen na frekvenco ω . Električni nihajni krog s porazdeljenimi gradniki L/l in C/l imenujemo tudi četrt-valovni rezonator.

Iz napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$ na prenosnem vodu izračunamo kompleksno moč P . Kompleksna moč vsebuje delovno moč $\mathrm{Re}[P]$ in jalovo moč $\mathrm{Im}[P]$. Delovna moč natančno ustreza razliki moči napredujočega in odbitega vala $\mathrm{Re}[P]=P_N-P_O$:



$$U(z)=U_N(z)+U_N(z)$$

$$I(z)=I_N(z)+I_O(z)$$

$$\frac{U_N(z)}{I_N(z)}=-\frac{U_O(z)}{I_O(z)}=Z_K=\sqrt{\frac{L/l}{C/l}}$$

$$P=\frac{U(z)\cdot I(z)^*}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left[U_N(0)\cdot e^{-j\beta z}+U_O(0)\cdot e^{+j\beta z}\right]\cdot\left[\frac{U_N(0)^*}{Z_K}\cdot e^{+j\beta z}-\frac{U_O(0)^*}{Z_K}\cdot e^{-j\beta z}\right]$$

$$P=\frac{|U_N|^2}{2Z_K}-\frac{|U_O|^2}{2Z_K}+j\frac{|U_N\cdot U_O|}{Z_K}\cdot\sin(2\beta z+\varphi)$$

$$U_N(0)\cdot U_O(0)^*=|U_N\cdot U_O|\cdot e^{-j\varphi}$$

$$U_O(0)\cdot U_N(0)^*=|U_N\cdot U_O|\cdot e^{+j\varphi}$$

Moči valov

$$P_N=\frac{|U_N|^2}{2Z_K}$$

Napredujoča moč

$$P_O=\frac{|U_O|^2}{2Z_K}$$

Odbita moč

Energija stojnega vala

$$\mathrm{Re}[P]=P_N-P_O$$

$$P_O=|\Gamma|^2\cdot P_N$$

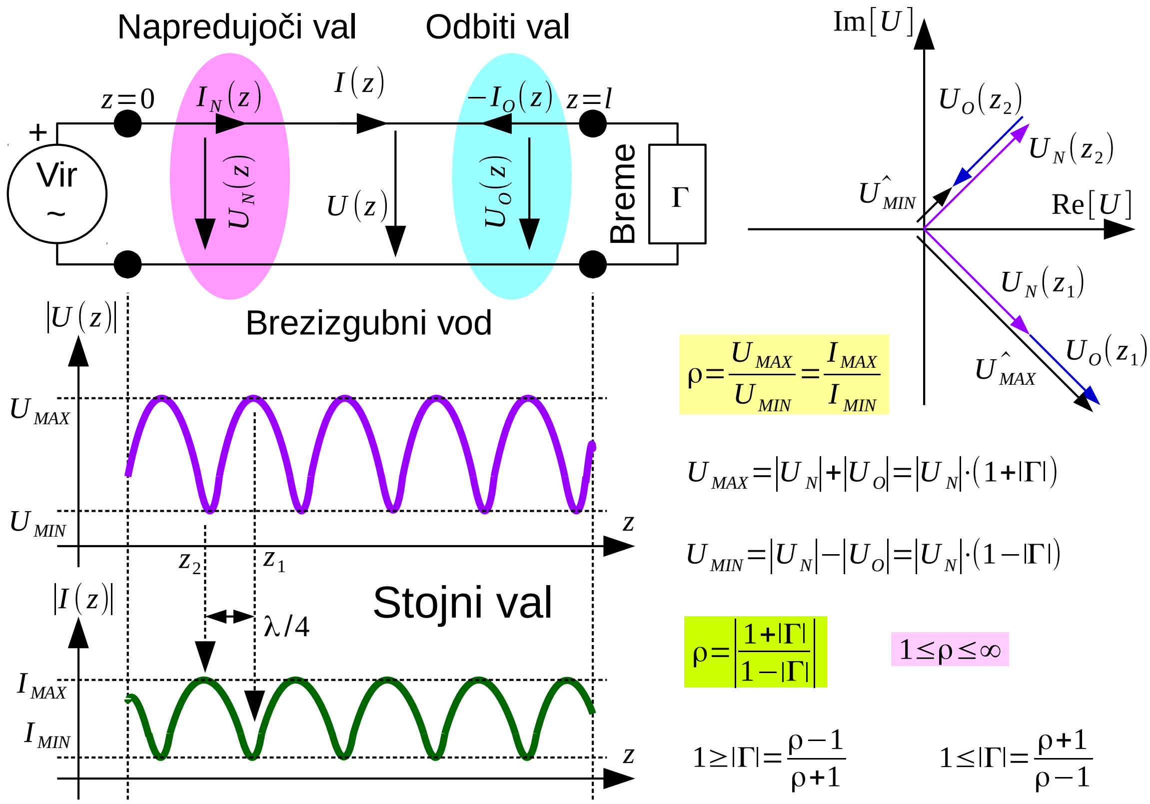
$$\mathrm{Re}[P]=P_N\cdot(1-|\Gamma|^2)$$

Skupna energija $W=W_N+W_O$ na prenosnem vodu je enaka vsoti energije napredujočega vala in energije odbitega vala. Napetost in tok na prenosnem vodu sta kazalčni vsoti napetosti in tokov posameznih valov. Pripadajoči interferenčni pojav imenujemo stojni val. V stojnem valu višek energije niha naprej-nazaj po prenosnem vodu. Magnetna energija v porazdeljeni induktivnosti L/l se pretvarja v električno energijo v porazdeljeni kapacitivnosti C/l in obratno. Nihajočo energijo opisuje jalova moč $\mathrm{Im}[P]$ na prenosnem vodu.

Stojni val najenostavneje opišemo na brezizgubnem vodu. Kazalca napetosti napredujočega $U_N(z)$ in odbitega $U_N(z)$ vala se na določenih mestih (z_1) sofazno seštevata v U_{MAX} , na nekaterih drugih mestih (z_2) pa protifazno odštevata v U_{MIN} . Razdalja med sosednjima maksimumom in minimumom napetosti $z_1-z_2=\lambda/4$ je enaka četrtini valovne dolžine.

Stojni val amplitude napetosti $|U(z)|$ predstavlja ovojnico, pod katero se plazi sinusno valovanje s hitrostjo v od izvora k pasivnemu bremenu. Med plazenjem se amplituda valovanja stalno prilagaja tako, da se valovanje natančno dotika, a nikjer ne seka ovojnice stojnega vala. Ovojnica $|U(z)|$ nima sinusne oblike, minimumi oziroma globeli so ožje, maksimumi oziroma hrbti pa širši. Šele kvadrat ovojnice $|U(z)|^2$ bi imel sinusno obliko.

Če se frekvenca vira ω niti gradniki vezja s časom ne spreminjajo, ostaja ovojnica $|U(z)|$ popolnoma nespremenjena vedno na istem mestu. Od tod ime stojni val:

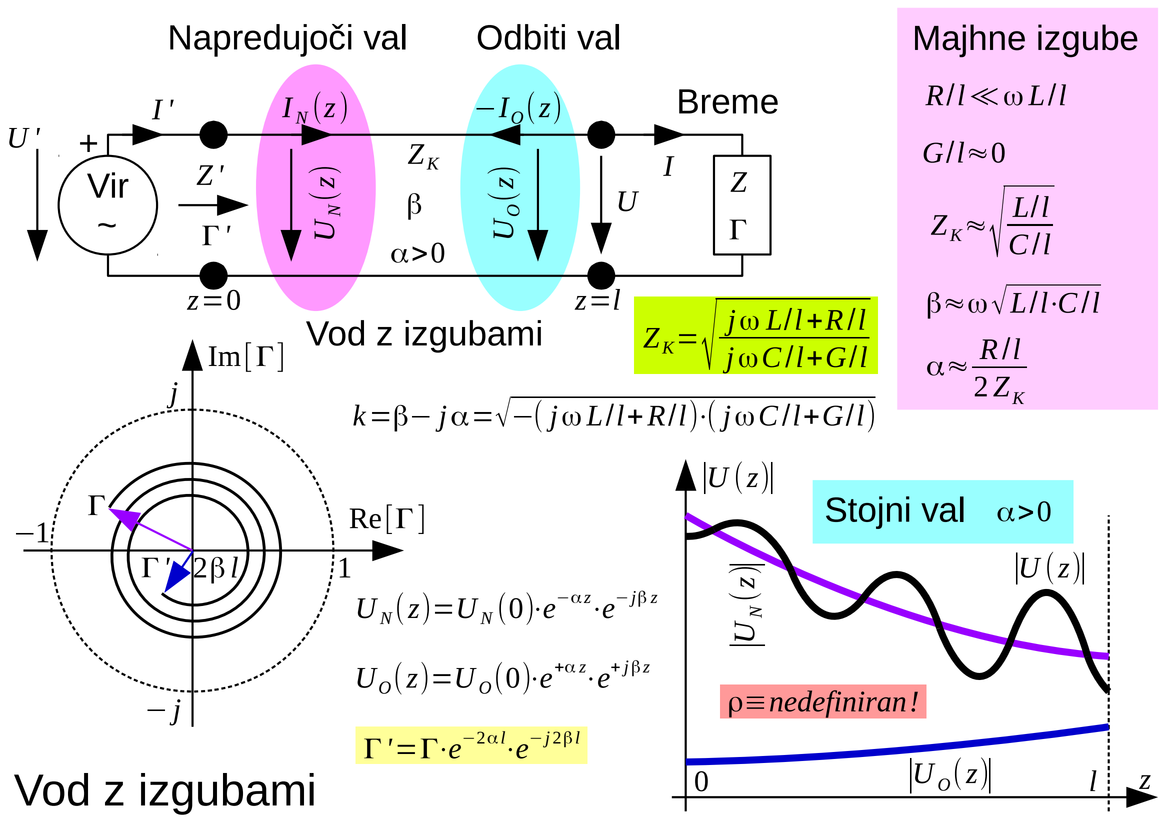


Podoben stojni val kot amplituda napetosti $|U(z)|$ ima tudi amplituda toka $|I(z)|$. Položaji maksimumov toka (z_2) pri tem sovpadajo s položaji minimumov napetosti. Obratno položaji maksimumov napetosti (z_1) sovpadajo s položaji minimumov toka. Energija niha z dvakratno frekvenco 2ω med hrbti toka in hrbti napetosti. Energija se kopiči v obliki magnetne energije v porazdeljeni induktivnosti L/l v okolici hrbtov toka oziroma v obliki električne energije v porazdeljeni kapacitivnosti C/l v okolici hrbtov napetosti.

Na brezizgubnem vodu lahko določimo razmerje stojnega vala (angleško: standing-wave ratio ali SWR) oziroma valovitost $\rho=U_{MAX}/U_{MIN}$ kot razmerje med maksimumom in minimumom iste veličine, amplitude napetosti $|U(z)|$ ali amplitude toka $|I(z)|$. Dodatno se v slovenski literaturi za razmerje stojnega vala ρ uporablja tudi dokaj ponesrečen izraz »neubranost«. Valovitost ρ lahko neposredno izračunamo iz velikosti odbojnosti $|\Gamma|$. V obratni smeri dobimo iz ρ dve različni (recipročni) vrednosti za $|\Gamma|$ za pasivno oziroma aktivno breme.

Valovitost ρ je sicer neimenovano razmerje, ki se lahko giblje v mejah $1 \leq \rho \leq \infty$. Uporaba veličine ρ je vezana na starodavne merilne pripomočke, ki so neposredno opazovali stojni val na merilnem vodu. Danes je bolj smiselno uporabljati velikost odbojnosti $|\Gamma|$ oziroma vsaj preračunati vanjo rezultat meritve ρ, če že ne znamo izmeriti celotne kompleksne odbojnosti Γ. Pozor, fizikalna veličina valovitost ρ sploh ne obstaja na prenosnih vodih z izgubami!

V resničnem prenosnem vodu moramo upoštevati tudi izgube. Kovinski vodniki dodajajo od nič različno zaporedno upornost $R(\omega)$, ki je funkcija frekvence. Nebrezhibna izolacija dodaja vzporedno prevodnost $G(\omega)$, ki je prav tako funkcija frekvence. Pri eni sami frekvenci ω smemo privzeti, da sta upornost vodnikov na enoto dolžine R/l in prevodnost izolacije na enoto dolžine G/l konstanti:



Resnične vode skušamo graditi tako, da bi bile izgube čim manjše. Dielektrike znamo izdelati zelo dobre, kondenzatorji v sodobnem pomnilniku FLASH zadržijo informacijo tudi 100let! Žal nimamo dobrih prevodnikov, tok v kratko-sklenjeni tuljavi iz bakrene žice se razpolovi že v milisekundi. Celo tok v zanki iz supra-prevodnika se razpolovi v enem tednu.

V dobro izdelanem prenosnem vodu smemo zanemariti prevodnost izolacije $G/l \approx 0$. Upornost vodnikov R/l je v zanimivem frekvenčnem področju za telekomunikacije $f \geq 1\,MHz$ za več velikostnih razredov manjša od induktivne reaktance $\omega L/l$. V večini primerov smemo za karakteristično impedanco Z_K in fazno konstanto β uporabiti kar enostavne izraze za brezizgubni vod. Za slabljenje smemo uporabiti približen izraz $\alpha = R/l/(2 Z_K)$.

Na izgubnem prenosnem vodu se spreminjata faza in amplituda odbojnosti $\Gamma(z)$. Napredujoči val $U_N(z)$ je slabljen v smeri $+z$ proti bremenu, odbiti val $U_O(z)$ pa je slabljen v nasprotni smeri $-z$ proti viru. Velikost odbojnosti $|\Gamma(z)|$ je največja na bremenu in upada proti viru. Kompleksna odbojnost $\Gamma(z)$ tedaj opiše logaritemsko spiralo v Smith-ovem diagramu. Na resničnem vodu z majhnimi izgubami naredi logaritemska spirala dosti več ovojev in sama spirala je gostejša, kot je to prikazano na sliki!

Preslikavo impedance bremena Z na tisto, kar vidi vir Z' , določimo podobno kot na brezizgubnem vodu. Najprej iz impedance Z izračunamo odbojnost bremena Γ . Nato odbojnost bremena zavrtimo po spirali v Smith-ovem diagramu do priključka vira $\Gamma' = \Gamma \cdot e^{-2\alpha l} \cdot e^{-j2\beta l}$. Končno iz preslikane odbojnosti Γ' izračunamo preslikano impedanco Z' , kar vidi vir.

Tudi na vodu z izgubami se v primeru neprilagojenega bremena $\Gamma \neq 0$ vzpostavi stojni val kot interferenca napredujočega vala $U_N(z)$ in odbitega vala $U_O(z)$. Stojni val ima minimume in maksimume. Tudi na izgubnem vodu velja, da globeli napetosti sovpadajo s hrbti toka in obratno, globeli toka sovpadajo s hrbti napetosti.

Zaradi različnih smeri slabljenja napredujočega vala $e^{-\alpha z}$ v smeri $+z$ oziroma odbitega vala $e^{+\alpha z}$ v smeri $-z$ so hrbti stojnega vala napetosti (toka) načeloma različno visoki. Prav tako so globeli stojnega vala napetosti (toka) različno globoke. Na vodu z izgubami zato razmerje stojnega vala ρ sploh ni določeno!

Stojni val pomeni tudi v primeru voda z izgubami dodatno energijo, ki niha naprej-nazaj po prenosnem vodu. Višek energije pomeni še dodatne izgube na vodu z izgubami. Neprilagojeno breme $\Gamma \neq 0$ torej pomeni še dodatno slabljenje voda v primerjavi s slabljenjem voda do prilagojenega bremena $\Gamma = 0$. Poleg popačenja signalov zaradi zvonjenja je povečano slabljenje neprilagojenih bremen dodaten razlog za skrbno prilagoditev bremen in virov na karakteristično impedanco voda Z_K .

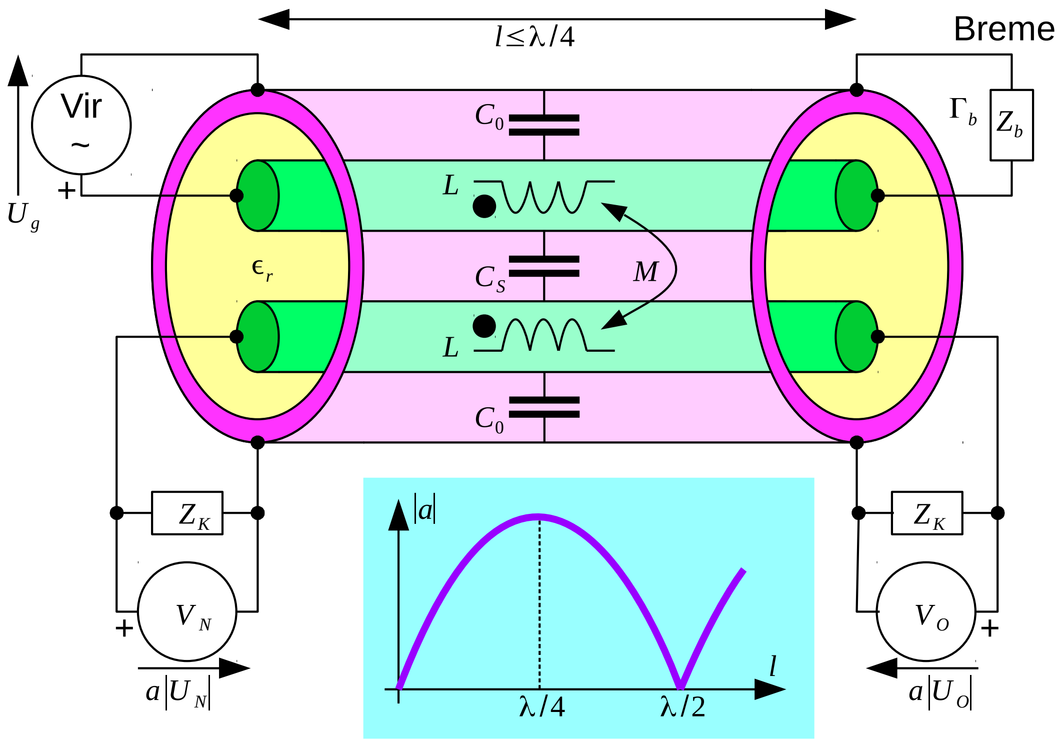
Rešitev telegrafske enačbe za vod z izgubami v frekvenčnem prostoru nam neposredno daje slabljenje valovanja na enoto dolžine $\alpha = a_{Np}/l$. V primeru dobro prilagojenega vira in bremena je odbiti val zanemarljiv, slabljenje $\alpha = a_{Np}/l$ tedaj kar prestavlja celotno slabljenje voda med virom in bremenom. V praksi nas zanima slabljenje v decibelih na enoto dolžine, torej $a_{dB}/l = \alpha \cdot 20/\ln 10$.

Odbojnost Γ lahko merimo v frekvenčnem prostoru z povsem enakim mostičem kot v časovnem prostoru. Seveda moramo imeti primeren vir in primeren voltmeter. Prav od vrste voltmetra je odvisno, kaj lahko z mostičem merimo. Navaden izmenični voltmeter meri samo amplitudo napetosti, torej z njim lahko izmerimo samo velikost odbojnosti $|\Gamma|$. Vektorski voltmeter meri amplitudo napetosti in razliko v fazi do neke reference (vira), z njim lahko v celoti izmerimo kompleksno odbojnost Γ .

V ožjem frekvenčnem pasu si lahko privoščimo še drugačna vezja oziroma naprave, ki znajo ločiti med napredujočim in odbitim valom ter vnašajo manjše slabljenje signalov od merilnega mostiča. Zelo pogosta naprava za merjenje odbojnosti v radijski tehniki je smerni sklopnik, bolj natančno protismerni sklopnik.

Protismerni sklopnik vsebuje oklop za dva vodnika. Vsak vodnik ima lastno porazdeljeno kapacitivnost C_0 in induktivnost L . Med vodnikoma obstaja magnetni sklop preko porazdeljene medsebojne induktivnosti M in električni sklop preko porazdeljene kapacitivnosti C_S . Dolžina sklopnika je običajno krajša od četrtine valovne dolžine $l \leq \lambda/4$.

Medsebojna faza med magnetnim in električnim sklopom je takšna, da se valovanje iz enega (gornjega) vodnika sklaplja v drugi (spodnji) vodnik v obratni smeri, kar imenujemo protismerni sklop. Homogen dielektrik ϵ_r omogoča preprosto doseganje smernosti, to je popolno izničenje sosmernega sklopa v protismernem sklopniku:



Protismerni sklopnik

Spodnji vodnik zaključimo na obeh koncih na njegovo karakteristično impedanco Z_K . Na voltmetrih dobimo napetosti ki so sorazmerne napredujočemu valu $a|U_N|$ in odbitemu valu $a|U_N|$, kjer je a konstanta sklopnika. Slednja je frekvenčno odvisna in doseže največjo vrednost pri dolžini sklopnika $l=\lambda/4$.

Povsem enako kot pri mostiču je tudi pri smernem sklopniku rezultat meritve odvisen od vrste uporabljenih voltmetrov. Navadna izmenična voltmetra merita samo amplitudi napetosti, torej z njima lahko izmerimo samo velikost odbojnosti $|\Gamma|$. Vektorski voltmeter meri amplitudi obeh napetosti ter medsebojno fazo, z njim lahko v celoti izmerimo kompleksno odbojnost Γ .

* * * * *