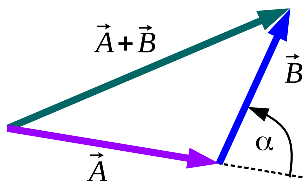
6. Vektorji in koordinate

Povsem natančen opis eno-dimenzijske naloge elektrodinamike je izvedljiv s porazdeljenimi tuljavami, kondenzatorji in upori. Vse veličine vključno s tokovi in napetostmi so skalarne veličine. Skalarno veličino opišemo z enim samim številom, realnim oziroma kompleksnim (kazalec), ki ima določene merske enote. Prave naloge elektrodinamike seveda imajo tri dimenzije v prostoru, kjer opis s skalarnimi veličinami ne zadošča več.

Prave tri-dimenzijske naloge vsebujejo vektorske veličine. Vektor ima velikost in smer. V treh dimenzijah so to tri neodvisna števila s pripadajočimi merskimi enotami, tri realna oziroma tri kompleksna, če nalogo rešujemo v frekvenčnem prostoru in je vektor hkrati tudi kazalec. V izogibanje zmešnjavi vse vektorske veličine vedno označimo s puščico nad črko (imenom), da jih razlikujemo od skalarnih veličin. Isto črko (oznako) brez puščice najpogosteje (ampak ne vedno!) uporabimo za velikost vektorja $A=|\vec{A}|$.

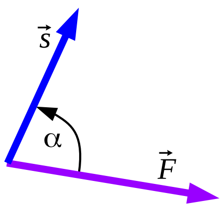
Fizikalne naloge zahtevajo različne računske operacije med vektorji: izračun dolžine (velikosti) vektorja, seštevanje (odštevanje) vektorjev ter dve različni množenji vektorjev:

Seštevanje vektorjev



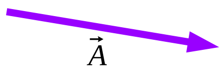
$$|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2+2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha}$$

Skalarni produkt



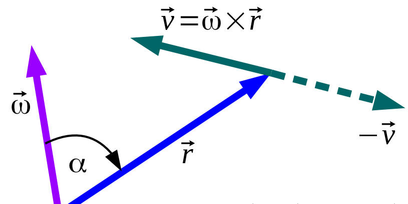
$$W=\vec{F}\cdot\vec{s}=\vec{s}\cdot\vec{F}=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\alpha$$

Velikost vektorja



$$|\vec{A}|=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$$

Vektorski produkt



$\vec{v}\perp\vec{\omega}$ $\quad$ $\vec{v}\perp\vec{r}$

$$|\vec{v}|=|\vec{\omega}\times\vec{r}|=|\vec{\omega}||\vec{r}|\sin\alpha$$

$\vec{r}\times\vec{\omega}=-\vec{v}=-\vec{\omega}\times\vec{r}$ Desni vijak!

Povsem enako kot skalarne veličine smemo med sabo seštevati le vektorje, ki imajo enake merske enote. Velikost vsote dobimo iz kosinusnega izreka, kjer upoštevamo kot med vektorjema α . Smer vsote je vedno med smermi obeh vektorjev, ki smo ju sešteli. Zaporedje vektorjev je pri seštevanju nepomembno.

Skalarni produkt srečamo v številnih fizikalnih nalogah. Na primer, opravljeno delo W je skalar, bolj točno skalarni produkt vektorja sile $\vec{F}$ in vektorja poti $\vec{s}$. Vmesni kot α določa velikost skalarnega produkta, ki je lahko tudi nič pri $\alpha=\pi/2$ ali celo negativen pri $\alpha>\pi/2$. Pri skalarnem produktu smemo oba vektorja med sabo zamenjati, ker to ne vpliva na rezultat. Skalarni produkt istega vektorja samega s sabo največkrat uporabimo za izračun velikosti vektorja.

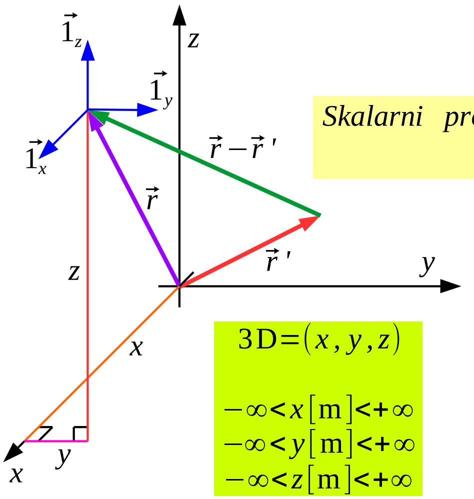
Vektorski produkt srečamo v vseh nalogah, ki vsebujejo vrtenje, vključno z nalogami magnetike v treh dimenzijah. Na primer, vektorski produkt vektorja krožne frekvence $\vec{\omega}$ in vektorja položaja delca $\vec{r}$ daje vektor hitrosti delca $\vec{v}$. Od vektorskega produkta zahtevamo, da je pravokoten na oba izvorna vektorja in sorazmeren sinusu vmesnega kota α .

Vektor krožne frekvence $\vec{\omega}$ kaže v smeri osi vrtenja. Z upoštevanjem zahteve za pravokotnost ima vektorski produkt $\vec{v}$ še vedno dve možni smeri. Smer vektorskega produkta $\vec{v}$ po definiciji izbiramo po pravilu desnega vijaka. Isto pravilo zahteva, da vektorski produkt zamenja predznak, če zmnožena vektorja med sabo zamenjamo.

Opis fizikalne naloge, ki vsebuje vektorje, je lahko zelo zahteven. Težko je že določiti kot α med dvema vektorjema. Še težje je določiti, kam kaže vsota dveh vektorjev. Najbolj zoprna naloga je vsekakor določanje smeri vektorskega produkta.

V izogibanje zmešnjavi pri opisu fizikalne naloge (elektrodinamike) je smiselno uvesti koordinatni sistem. Primeren koordinatni sistem naj bi imel naslednje lastnosti, da poenostavi opis in računanje z vektorji:
1) tri dimenzije (3D),
2) pravokotnost med koordinatnimi osmi (pravokotni) in
3) vgrajeno pravilo desnega vijaka (desnoročni).
Najpreprostejši koordinatni sistem, ki ustreza gornjim zahtevam, je tri-dimenzijski kartezični koordinatni sistem:

Kartezične koordinate



Komponente $\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)=\vec{1}_x A_x+\vec{1}_y A_y+\vec{1}_z A_z$

$A_x=\vec{1}_x\cdot\vec{A} \quad A_y=\vec{1}_y\cdot\vec{A} \quad A_z=\vec{1}_z\cdot\vec{A}$

Skalarni produkt $\vec{A}\cdot\vec{B}=(\vec{1}_x A_x+\vec{1}_y A_y+\vec{1}_z A_z)\cdot(\vec{1}_x B_x+\vec{1}_y B_y+\vec{1}_z B_z)$

$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_x B_x+A_y B_y+A_z B_z$

Velikost $|\vec{A}|=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}=\sqrt{A_x^1+A_y^2+A_z^2}$

$|\vec{r}|=r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$3\mathrm{D}=(x,y,z)$

$-\infty<x[\mathrm{m}]<+\infty$

$-\infty<y[\mathrm{m}]<+\infty$

$-\infty<z[\mathrm{m}]<+\infty$

Razdalja $|\vec{r}-\vec{r}\,'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$

Vektorski produkt

$\vec{A}\times\vec{B}=(\vec{1}_x A_x+\vec{1}_y A_y+\vec{1}_z A_z)\times(\vec{1}_x B_x+\vec{1}_y B_y+\vec{1}_z B_z)$

$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{1}_x(A_y B_z-A_z B_y)+$

$+\vec{1}_y(A_z B_x-A_x B_z)+\vec{1}_z(A_x B_y-A_y B_x)$

Enotni vektorji $1=\vec{1}_x\cdot\vec{1}_x=\vec{1}_y\cdot\vec{1}_y=\vec{1}_z\cdot\vec{1}_z$

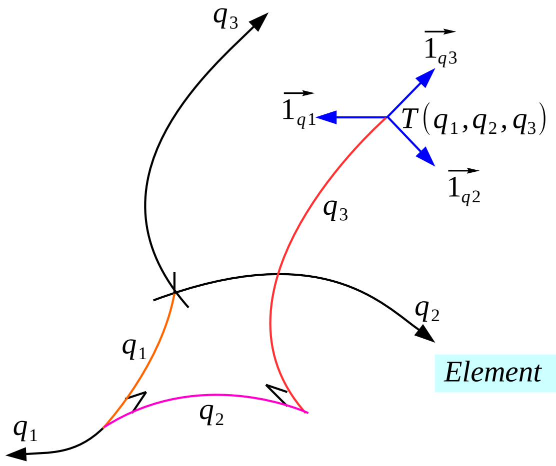
Pravokotni $\vec{1}_x\perp\vec{1}_y\perp\vec{1}_z\perp\vec{1}_x \quad 0=\vec{1}_x\cdot\vec{1}_y=\vec{1}_y\cdot\vec{1}_z=\vec{1}_z\cdot\vec{1}_x$

Desnoročni $\vec{1}_z=\vec{1}_x\times\vec{1}_y \quad \vec{1}_x=\vec{1}_y\times\vec{1}_z \quad \vec{1}_y=\vec{1}_z\times\vec{1}_x$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

V kartezičnem koordinatnem sistemu

Krivočrtne koordinate



Element dolžine $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$

Povezava s kartezičnimi

$$x = x(q_1, q_2, q_3)$$
$$y = y(q_1, q_2, q_3)$$
$$z = z(q_1, q_2, q_3)$$

$$dl_1 = \left(\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} \right) dq_1 = h_1\, dq_1$$

Element površine $dA = dl_1\, dl_2 = h_1 h_2\, dq_1\, dq_2$

Element prostornine $dV = dl_1\, dl_2\, dl_3 = h_1 h_2 h_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3$

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}$$

$$h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}$$

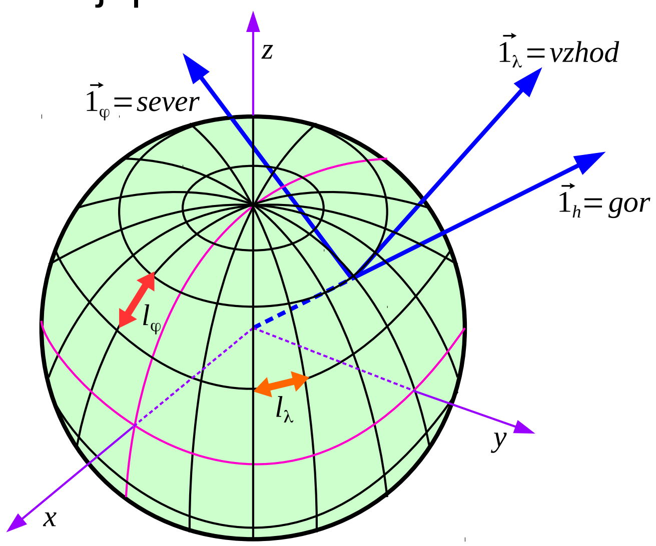
$3\mathrm{D} = (q_1, q_2, q_3)$

Enotni vektorji $1 = \vec{1}_{q1} \cdot \vec{1}_{q1} = \vec{1}_{q2} \cdot \vec{1}_{q2} = \vec{1}_{q3} \cdot \vec{1}_{q3}$

Pravokotni $\vec{1}_{q1} \perp \vec{1}_{q2} \perp \vec{1}_{q3} \perp \vec{1}_{q1}$ $\quad 0 = \vec{1}_{q1} \cdot \vec{1}_{q2} = \vec{1}_{q2} \cdot \vec{1}_{q3} = \vec{1}_{q3} \cdot \vec{1}_{q1}$

Desnoročni $\vec{1}_{q3} = \vec{1}_{q1} \times \vec{1}_{q2}$ $\quad \vec{1}_{q1} = \vec{1}_{q2} \times \vec{1}_{q3}$ $\quad \vec{1}_{q2} = \vec{1}_{q3} \times \vec{1}_{q1}$

Zemljepisne koordinate



Pretvorba $(\lambda, \varphi, h) \rightarrow (x, y, z)$

$$x = (h + R_Z)\cos\left(\frac{\pi}{180^\circ}\lambda\right)\cos\left(\frac{\pi}{180^\circ}\varphi\right)$$
$$y = (h + R_Z)\sin\left(\frac{\pi}{180^\circ}\lambda\right)\cos\left(\frac{\pi}{180^\circ}\varphi\right)$$
$$z = (h + R_Z)\sin\left(\frac{\pi}{180^\circ}\varphi\right)$$
$$R_Z = 6378\ \mathrm{km}$$

Laméjevi koeficienti

$$h_\lambda = \frac{\pi(h + R_Z)}{180^\circ}\cos\left(\frac{\pi}{180^\circ}\varphi\right)$$
$$h_\varphi = \frac{\pi(h + R_Z)}{180^\circ}$$
$$h_h = 1$$

$3\mathrm{D} = (\lambda, \varphi, h)$

$$0^\circ \le \lambda[^\circ] < 360^\circ$$
$$-90^\circ \le \varphi[^\circ] \le 90^\circ$$
$$-R_Z \le h[\mathrm{km}] < +\infty$$

Pravokotni $\vec{1}_\lambda \perp \vec{1}_\varphi \perp \vec{1}_h \perp \vec{1}_\lambda$

Desnoročni $\vec{1}_h = \vec{1}_\lambda \times \vec{1}_\varphi$

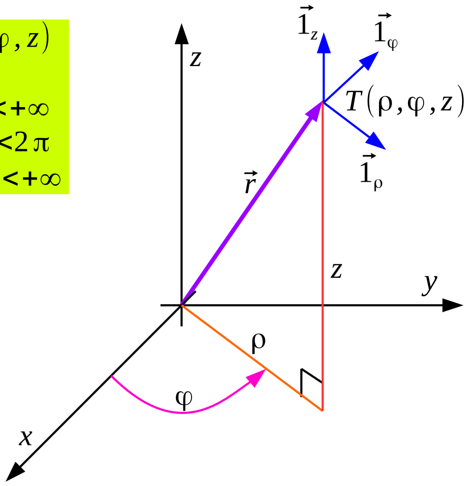
Zgled: $\lambda = 30^\circ$ $\quad \varphi = 45^\circ$ $\quad h = 0\ \mathrm{km}$

$$h_\lambda = 78.7\ \mathrm{km}/^\circ$$
$$h_\varphi = 111.3\ \mathrm{km}/^\circ$$
$$h_h = 1$$
$$\Delta\lambda = 20^\circ \rightarrow l_\lambda = h_\lambda \Delta\lambda = 1574\ \mathrm{km}$$
$$\Delta\varphi = 20^\circ \rightarrow l_\varphi = h_\varphi \Delta\varphi = 2226\ \mathrm{km}$$

Valjne koordinate

$3\text{D}=(\rho,\varphi,z)$

$0\leq\rho[\text{m}]<+\infty$
$0\leq\varphi[\text{rd}]<2\pi$
$-\infty<z[\text{m}]<+\infty$



Pretvorba $(\rho,\varphi,z)\rightarrow(x,y,z)$

$$x=\rho\cos\varphi$$
$$y=\rho\sin\varphi$$
$$z=z$$
$$\vec{1}_x=\vec{1}_\rho\cos\varphi-\vec{1}_\varphi\sin\varphi$$
$$\vec{1}_y=\vec{1}_\rho\sin\varphi+\vec{1}_\varphi\cos\varphi$$
$$\vec{1}_z=\vec{1}_z$$

Laméjevi koeficienti

$$h_\rho=1$$
$$h_\varphi=\rho$$
$$h_z=1$$

Pretvorba $(x,y,z)\rightarrow(\rho,\varphi,z)$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\varphi=\arctan(y/x)\quad(\textit{kvadrant ?})$$
$$z=z$$
$$\vec{1}_\rho=\vec{1}_x\cos\varphi+\vec{1}_y\sin\varphi$$
$$\vec{1}_\varphi=-\vec{1}_x\sin\varphi+\vec{1}_y\cos\varphi$$
$$\vec{1}_z=\vec{1}_z$$

Enotni vektorji $1=\vec{1}_\rho\cdot\vec{1}_\rho=\vec{1}_\varphi\cdot\vec{1}_\varphi=\vec{1}_z\cdot\vec{1}_z$

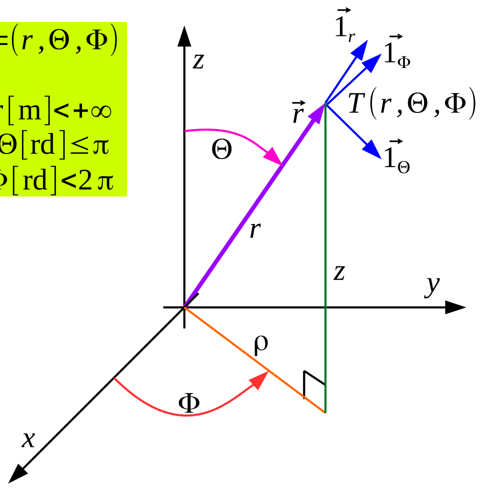
Pravokotni $\vec{1}_\rho\perp\vec{1}_\varphi\perp\vec{1}_z\perp\vec{1}_\rho\qquad 0=\vec{1}_\rho\cdot\vec{1}_\varphi=\vec{1}_\varphi\cdot\vec{1}_z=\vec{1}_z\cdot\vec{1}_\rho$

Desnoročni $\vec{1}_z=\vec{1}_\rho\times\vec{1}_\varphi\qquad\vec{1}_\rho=\vec{1}_\varphi\times\vec{1}_z\qquad\vec{1}_\varphi=\vec{1}_z\times\vec{1}_\rho$

Krogelne koordinate

$3\text{D}=(r,\Theta,\Phi)$

$0\leq r[\text{m}]<+\infty$
$0\leq\Theta[\text{rd}]\leq\pi$
$0<\Phi[\text{rd}]<2\pi$



Pretvorba $(r,\Theta,\Phi)\rightarrow(x,y,z)$

$$x=r\sin\Theta\cos\Phi$$
$$y=r\sin\Theta\sin\Phi$$
$$z=r\cos\Theta$$
$$\vec{1}_x=\vec{1}_r\sin\Theta\cos\Phi+\vec{1}_\Theta\cos\Theta\cos\Phi-\vec{1}_\Phi\sin\Phi$$
$$\vec{1}_y=\vec{1}_r\sin\Theta\sin\Phi+\vec{1}_\Theta\cos\Theta\sin\Phi+\vec{1}_\Phi\cos\Phi$$
$$\vec{1}_z=\vec{1}_r\cos\Theta-\vec{1}_\Theta\sin\Theta$$

Pretvorba $(x,y,z)\rightarrow(r,\Theta,\Phi)$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\Theta=\arccos\left(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$
$$\Phi=\arctan(y/x)\quad(\textit{kvadrant ?})$$
$$\vec{1}_r=\vec{1}_x\sin\Theta\cos\Phi+\vec{1}_y\sin\Theta\sin\Phi+\vec{1}_z\cos\Theta$$
$$\vec{1}_\Theta=\vec{1}_x\cos\Theta\cos\Phi+\vec{1}_y\cos\Theta\sin\Phi-\vec{1}_z\cos\Theta$$
$$\vec{1}_\Phi=-\vec{1}_x\sin\Phi+\vec{1}_y\cos\Phi$$

Enotni vektorji $1=\vec{1}_r\cdot\vec{1}_r=\vec{1}_\Theta\cdot\vec{1}_\Theta=\vec{1}_\Phi\cdot\vec{1}_\Phi$

Laméjevi koeficienti

$$h_r=1$$
$$h_\Theta=r$$
$$h_\Phi=r\sin\Theta$$

Pravokotni $\vec{1}_r\perp\vec{1}_\Theta\perp\vec{1}_\Phi\perp\vec{1}_r\qquad 0=\vec{1}_r\cdot\vec{1}_\Theta=\vec{1}_\Theta\cdot\vec{1}_\Phi=\vec{1}_\Phi\cdot\vec{1}_r$

Desnoročni $\vec{1}_\Phi=\vec{1}_r\times\vec{1}_\Theta\qquad\vec{1}_r=\vec{1}_\Theta\times\vec{1}_\Phi\qquad\vec{1}_\Theta=\vec{1}_\Phi\times\vec{1}_r$

Valjno-eliptične koordinate

$3\mathrm{D}=(u, v, z)$

$0 \le u[\mathrm{Np}] < +\infty$

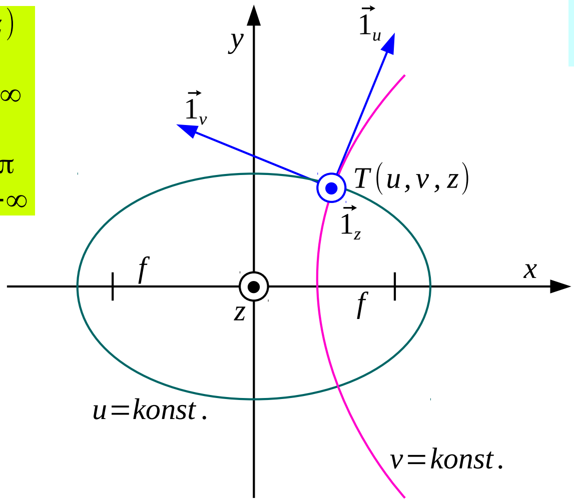
$f[\mathrm{m}]$

$0 \le v[\mathrm{rd}] < 2\pi$

$-\infty < z[\mathrm{m}] < +\infty$

Pretvorba $(u, v, z) \rightarrow (x, y, z)$

$$x = f \cosh u \cos v$$
$$y = f \sinh u \sin v$$
$$z = z$$



Laméjevi koeficienti

$$h_u = f\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}$$
$$h_v = f\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}$$
$$h_z = 1$$

Približek $u \gg 1$

$(u, v, z) \rightarrow (\rho, \varphi, z)$

$$\rho \approx \frac{f}{2} e^u$$
$$\varphi \approx v$$
$$z = z$$

Enotni vektorji $1 = \vec{1}_u \cdot \vec{1}_u = \vec{1}_v \cdot \vec{1}_v = \vec{1}_z \cdot \vec{1}_z$

Pravokotni $\vec{1}_u \perp \vec{1}_v \perp \vec{1}_z \perp \vec{1}_u \quad 0 = \vec{1}_u \cdot \vec{1}_v = \vec{1}_v \cdot \vec{1}_z = \vec{1}_z \cdot \vec{1}_u$

Desnoročni $\vec{1}_z = \vec{1}_u \times \vec{1}_v \quad \vec{1}_u = \vec{1}_v \times \vec{1}_z \quad \vec{1}_v = \vec{1}_z \times \vec{1}_u$

* * * * *