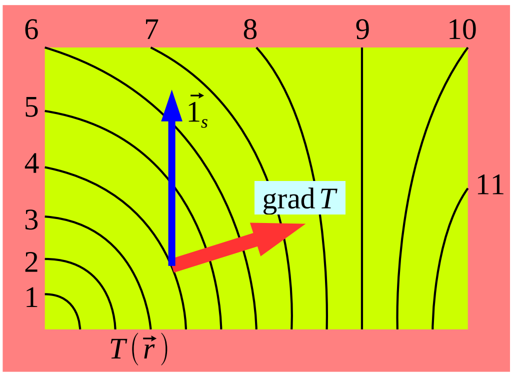
7. Odvajanje v prostoru

Reševanje fizikalnih nalog, kamor sodi tudi elektrodinamika, zahteva odvajanje oziroma integriranje različnih funkcij po koordinatah prostora. V tri-dimenzijskih nalogah nastopajo funkcije vseh treh koordinat, na primer (x,y,z) ali na kratko zapisano $(\vec{r})$. Funkcije so lahko skalarji, na primer temperatura $T(\vec{r})$ ali pa vektorji, na primer sila $\vec{F}(\vec{r})$.

Zagrizeni matematiki na hitro zaključijo, da ima v treh dimenzijah skalarna funkcija tri med sabo neodvisne odvode po vseh treh različnih koordinatah. Vektorsko funkcijo lahko zapišemo po komponentah, torej tri komponente krat tri koordinate daje skupaj devet različnih odvodov. Opisano razmišljanje ima dve hudi pomanjkljivosti: rezultat mogoče nima nobenega fizikalnega pomena ter je odvisen od izbire koordinatnega sistema.

Bolj smiselno je opisati odvajanje skalarne funkcije treh koordinat $T(\vec{r})$ kot smerni odvod ali gradient. Smerni odvod $\operatorname{grad} T$ je vektor, ki kaže v smeri največje spremembe vrednosti funkcije. Velikost $|\operatorname{grad} T|$ ustreza velikosti odvoda skalarne funkcije po dolžinski enoti v smeri vektorja:

Smerni odvod (gradient)



Kartezične koordinate $T(\vec{r})=T(x,y,z)$

$$\operatorname{grad} T=\vec{1}_x\frac{\partial T}{\partial x}+\vec{1}_y\frac{\partial T}{\partial y}+\vec{1}_z\frac{\partial T}{\partial z}=\vec{\nabla} T$$

$$\vec{\nabla}=\vec{1}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{1}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{1}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

Valjne koordinate $T(\vec{r})=T(\rho,\varphi,z)$

$$\operatorname{grad} T=\vec{1}_\rho\frac{\partial T}{\partial \rho}+\vec{1}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \varphi}+\vec{1}_z\frac{\partial T}{\partial z}$$

Krogelne koordinate $T(\vec{r})=T(r,\Theta,\Phi)$

$$\operatorname{grad} T=\vec{1}_r\frac{\partial T}{\partial r}+\vec{1}_\Theta\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \Theta}+\vec{1}_\Phi\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial T}{\partial \Phi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial s}=\vec{1}_s\cdot\operatorname{grad} T=\vec{1}_s\cdot\vec{\nabla} T$$

$$\operatorname{grad} T=\vec{1}_{q1}\frac{\partial T}{\partial l_1}+\vec{1}_{q2}\frac{\partial T}{\partial l_2}+\vec{1}_{q3}\frac{\partial T}{\partial l_3}$$

$$dl_j=h_j dq_j$$

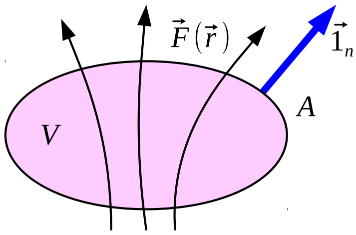
$$\operatorname{grad} T=\vec{1}_{q1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T}{\partial q_1}+\vec{1}_{q2}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T}{\partial q_2}+\vec{1}_{q3}\frac{1}{h_3}\frac{\partial T}{\partial q_3}$$

Odvod skalarne funkcije $T(\vec{r})$ v poljubni smeri s izračunamo tako, da naredimo skalarni produkt med smernikom $\vec{1}_s$ in smernim odvodom $\mathrm{grad}\,T$. Komponente smernega odvoda $\mathrm{grad}\,T$ so preprosto odvodi po vseh treh dolžinskih elementih l_1, l_2 in l_3 poljubnega koordinatnega sistema. Odvode po dolžinskih elementih l_1, l_2 in l_3 izračunamo iz odvodov po vseh treh koordinatah q_1, q_2 in q_3 s pomočjo Laméjevih koeficientov h_1, h_2 in h_3.

Izračun $\mathrm{grad}\,T$ je najpreprostejši v kartezičnem koordinatnem sistemu (x, y, z). Operator odvajanja lahko v kartezičnih koordinatah zapišemo kot simbolični vektor $\vec{\nabla}$ imenovan »Nabla«, ki deluje na skalarno funkcijo $T(\vec{r})$. Smerni odvod $\mathrm{grad}\,T$ je sicer neodvisen od izbranega koordinatnega sistema in se rezultat njegovega izračuna prav nič ne spremeni ne glede na uporabljeni koordinatni sistem. Le vektorja $\vec{\nabla}$ ne znamo zapisati v drugih koordinatnih sistemih. Bolj točno $\vec{\nabla}$ nima preprostega zapisa povsod tam, kjer smerniki niso konstantni vektorji.

Kot primera sta prikazana izračuna smernih odvodov v valjnih (ρ, φ, z) in krogelnih (r, Θ, Φ) koordinatah. Laméjevi koeficienti tu ne poskrbijo samo za pravilnost številskega izračuna, pač pa poskrbijo tudi za pravilne merske enote! Odvajanje po dolžini pomeni, da morajo imeti vse komponente smernega odvoda $\mathrm{grad}\,T$ iste merske enote, ki imajo dodaten meter v imenovalcu $[m]$ glede na prvotno funkcijo $T(\vec{r})$.

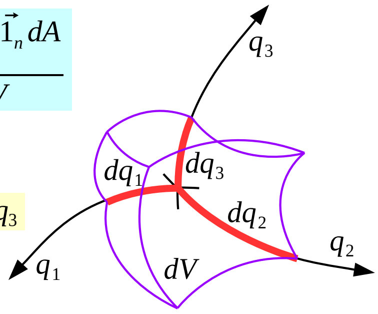
Izvornost (divergenca)



$$\operatorname{div}(\vec{F})=\lim_{dV\to 0}\frac{\oint\!\!\!\oint_{A\to 0}\vec{F}\cdot\vec{1}_n\,dA}{dV}$$

$$dV=dl_1\,dl_2\,dl_3$$

$$dV=h_1h_2h_3\,dq_1\,dq_2\,dq_3$$



Gaussov izrek

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{F})\,dV=\oint\!\!\!\oint_A \vec{F}\cdot\vec{1}_n\,dA$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{F})=\frac{1}{dV}[&-F_1(q_1)\,dA_{23}(q_1)+F_1(q_1+dq_1)\,dA_{23}(q_1+dq_1)\\&-F_2(q_2)\,dA_{13}(q_2)+F_2(q_2+dq_2)\,dA_{13}(q_2+dq_2)\\&-F_3(q_3)\,dA_{12}(q_3)+F_3(q_3+dq_3)\,dA_{12}(q_3+dq_3)]\end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(\vec{F})=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_2h_3F_1)}{\partial q_1}+\frac{\partial(h_1h_3F_2)}{\partial q_2}+\frac{\partial(h_1h_2F_3)}{\partial q_3}\right]$$

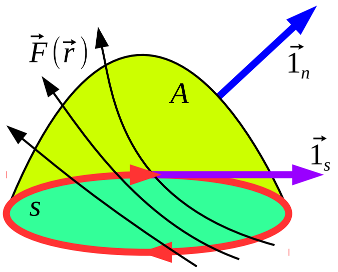
$$dA_{ij}=h_i(q_1,q_2,q_3)\,h_j(q_1,q_2,q_3)\,dq_i\,dq_j$$

Kartezične koordinate $\vec{F}(x,y,z)\rightarrow\operatorname{div}(\vec{F})=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$

Valjne koordinate $\vec{F}(\rho,\varphi,z)\rightarrow\operatorname{div}(\vec{F})=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$

Krogelne koordinate $\vec{F}(r,\Theta,\Phi)\rightarrow\operatorname{div}(\vec{F})=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2F_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial(\sin\Theta F_\Theta)}{\partial\Theta}+\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial F_\Phi}{\partial\Phi}$

Vrtinčenje (rotor)

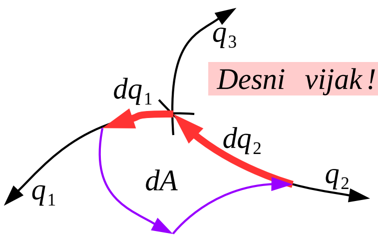


$$\vec{1}_{q3}\cdot\operatorname{rot}(\vec{F})=\lim_{dA\to 0}\frac{\oint_{s\to 0}\vec{F}\cdot\vec{1}_s\,ds}{dA}$$

$$dA=dl_1\,dl_2=h_1h_2\,dq_1\,dq_2$$

$$dl_j=h_j(q_1,q_2,q_3)\,dq_j$$

Desni vijak!



$$\begin{aligned}\vec{1}_{q3}\cdot\operatorname{rot}(\vec{F})=\frac{1}{dA}[&F_1(q_2)\,h_1(q_2)\,dq_1+F_2(q_1+dq_1)\,h_2(q_1+dq_1)\,dq_2\\&-F_1(q_2+dq_2)\,h_1(q_2+dq_2)\,dq_1-F_2(q_1)\,h_2(q_1)\,dq_2]\end{aligned}$$

Stokesov izrek

$$\iint_A \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{1}_n\,dA=\oint_s\vec{F}\cdot\vec{1}_s\,ds$$

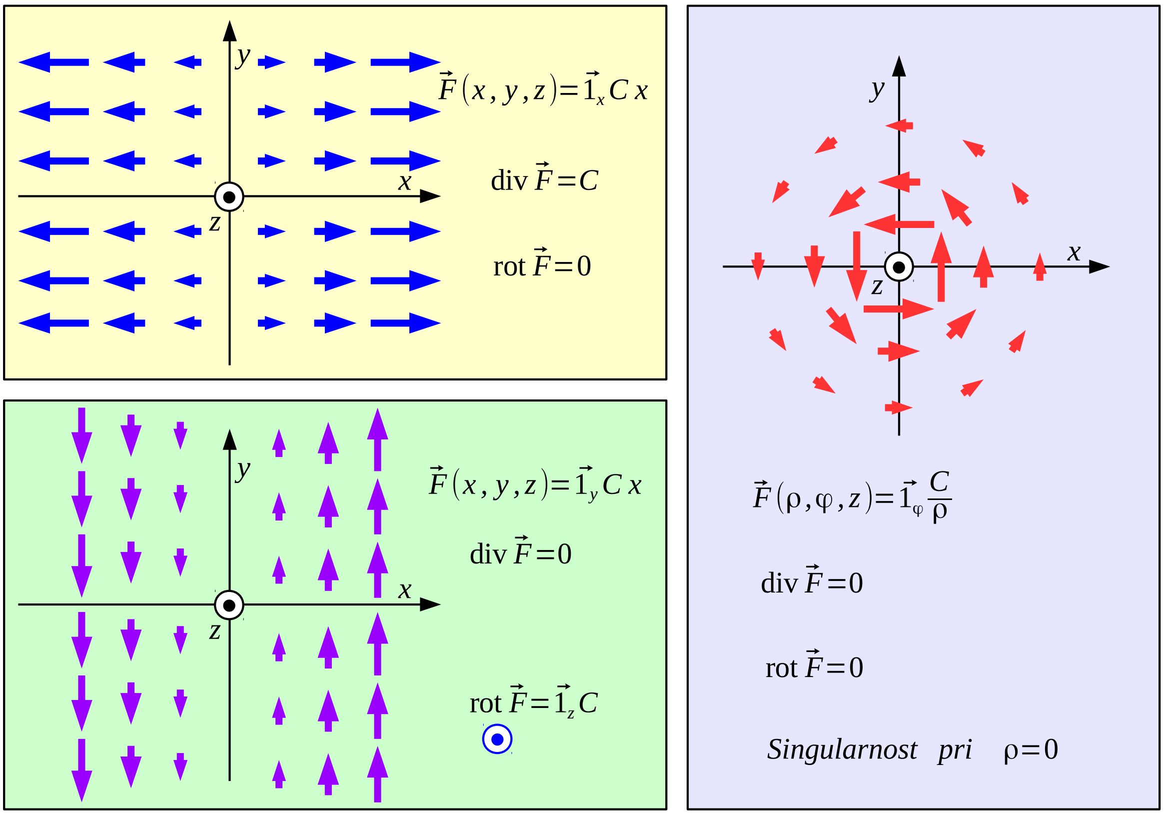
$$\vec{1}_{q3}\cdot\operatorname{rot}(\vec{F})=\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial F_2h_2}{\partial q_1}-\frac{\partial F_1h_1}{\partial q_2}\right]$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\vec{1}_{q1} & h_2\vec{1}_{q2} & h_3\vec{1}_{q3}\\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3}\\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3\end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\operatorname{curl}\vec{F}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\vec{1}_{q1} & \rho\vec{1}_\varphi & \vec{1}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_3\end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}(r,\Theta,\Phi)=\frac{1}{r^2\sin\Theta}\begin{vmatrix}\vec{1}_r & r\vec{1}_\Theta & r\sin\Theta\,\vec{1}_\Phi\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\Theta} & \frac{\partial}{\partial\Phi}\\ F_r & rF_\Theta & r\sin\Theta\,F_\Phi\end{vmatrix}$$



y
x
z
$\vec{F}(x,y,z)=\vec{1}_x C x$
$\operatorname{div}\vec{F}=C$
$\operatorname{rot}\vec{F}=0$
y
x
z
$\vec{F}(x,y,z)=\vec{1}_y C x$
$\operatorname{div}\vec{F}=0$
$\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{1}_z C$
y
x
z
$\vec{F}(\rho,\varphi,z)=\vec{1}_\varphi \frac{C}{\rho}$
$\operatorname{div}\vec{F}=0$
$\operatorname{rot}\vec{F}=0$
Singularnost pri $\rho=0$

* * * * *