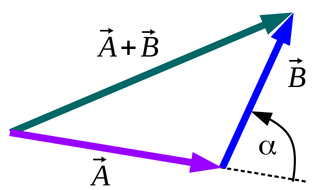
6. Vektorji in koordinate

Povsem natančen opis eno-dimenzijske naloge elektrodinamike je izvedljiv s porazdeljenimi tuljavami, kondenzatorji in upori. Vse veličine vključno s tokovi in napetostmi so skalarne veličine. Skalarno veličino opišemo z enim samim številom, realnim oziroma kompleksnim (kazalec), ki ima določene merske enote. Prave naloge elektrodinamike seveda imajo tri dimenzije v prostoru, kjer opis s skalarnimi veličinami ne zadošča več.

Prave tri-dimenzijske naloge vsebujejo vektorske veličine. Vektor ima velikost in smer. V treh dimenzijah so to tri neodvisna števila s pripadajočimi merskimi enotami, tri realna oziroma tri kompleksna, če nalogo rešujemo v frekvenčnem prostoru in je vektor hkrati tudi kazalec. V izogibanje zmešnjavi vse vektorske veličine vedno označimo s puščico nad črko (imenom), da jih razlikujemo od skalarnih veličin. Isto črko (oznako) brez puščice najpogosteje (ampak ne vedno!) uporabimo za velikost vektorja $A=|\vec{A}|$.

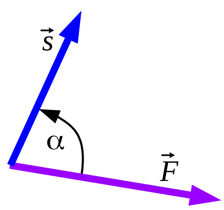
Fizikalne naloge zahtevajo različne računske operacije z vektorji: izračun dolžine (velikosti) vektorja, seštevanje (odštevanje) vektorjev ter dve različni množenji vektorjev:

Seštevanje vektorjev



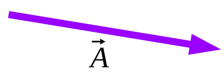
$$|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2+2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha}$$

Skalarni produkt



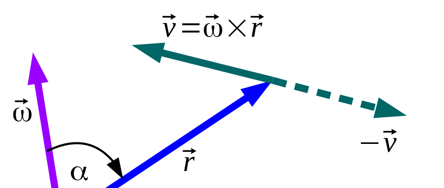
$$W=\vec{F}\cdot\vec{s}=\vec{s}\cdot\vec{F}=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\alpha$$

Velikost vektorja



$$|\vec{A}|=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$$

Vektorski produkt



$\vec{v}\perp\vec{\omega}$ $\vec{v}\perp\vec{r}$

$$|\vec{v}|=|\vec{\omega}\times\vec{r}|=|\vec{\omega}||\vec{r}|\sin\alpha$$

$\vec{r}\times\vec{\omega}=-\vec{v}=-\vec{\omega}\times\vec{r}$ Desni vijak!

Povsem enako kot skalarne veličine moremo med sabo seštevati le vektorje, ki imajo enake merske enote. Velikost vsote dobimo iz kosinusnega izreka, kjer upoštevamo kot med vektorjema α . Smer vsote je vedno med smermi obeh vektorjev, ki smo ju sešteli. Zaporedje vektorjev je pri seštevanju nepomembno.

Skalarni produkt (označen s piko, angleško: dot product) srečamo v številnih fizikalnih nalogah. Na primer, opravljeno delo W je skalar, bolj točno skalarni produkt vektorja sile $\vec{F}$ in vektorja poti $\vec{s}$. Vmesni kot α določa velikost skalarnega produkta, ki je lahko tudi nič pri $\alpha=\pi/2$ ali celo negativen pri $\alpha>\pi/2$. Pri skalarnem produktu smemo oba vektorja med sabo zamenjati, ker to ne vpliva na rezultat. Skalarni produkt istega vektorja samega s sabo največkrat uporabimo za izračun velikosti vektorja $|\vec{A}|=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$.

Vektorski produkt (označen s križcem, angleško: cross product) srečamo v vseh tri-dimenzijskih nalogah, ki vsebujejo vrtenje, vključno z nalogami magnetike. Na primer, vektorski produkt vektorja krožne frekvence $\vec{\omega}$ in vektorja položaja delca $\vec{r}$ daje vektor hitrosti delca $\vec{v}$. Od vektorskega produkta zahtevamo, da je pravokoten na oba izvorna vektorja in sorazmeren sinusu vmesnega kota α .

Vektor krožne frekvence $\vec{\omega}$ kaže v smeri osi vrtenja. Z upoštevanjem zahteve za pravokotnost ima vektorski produkt $\vec{v}$ še vedno dve možni smeri. Smer vektorskega produkta $\vec{v}$ po definiciji izbiramo po pravilu desnega vijaka. Isto pravilo zahteva, da vektorski produkt zamenja predznak, če zmnožena vektorja med sabo zamenjamo.

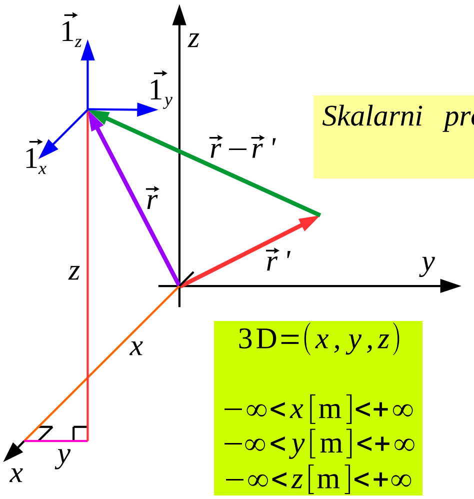
Opis fizikalne naloge, ki vsebuje vektorje, je lahko zelo zahteven. Težko je že določiti kot α med dvema vektorjema. Še težje je določiti, kam kaže vsota dveh vektorjev. Najbolj zoprna naloga je vsekakor določanje smeri vektorskega produkta.

V izogibanje zmešnjavi pri opisu fizikalne naloge (elektrodinamike) je smiselno uvesti koordinatni sistem. Primeren koordinatni sistem naj bi imel naslednje lastnosti, da poenostavi opis in računanje z vektorji:
1) tri dimenzije (3D),
2) pravokotnost med koordinatnimi osmi (pravokotni) in
3) vgrajeno pravilo desnega vijaka (desnoročni).

Koordinatni sistem je izumil francoski matematik René Descartes leta

1637, da je z njim povezal algebro in geometrijo. Najpreprostejši koordinatni sistem, ki ustreza gornjim zahtevam, je tri-dimenzijski kartezični (latinizirano ime Descartes) koordinatni sistem:

Kartezične koordinate



Komponente $\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)=\vec{1}_x A_x+\vec{1}_y A_y+\vec{1}_z A_z$

$A_x=\vec{1}_x\cdot\vec{A} \quad A_y=\vec{1}_y\cdot\vec{A} \quad A_z=\vec{1}_z\cdot\vec{A}$

Skalarni produkt $\vec{A}\cdot\vec{B}=(\vec{1}_x A_x+\vec{1}_y A_y+\vec{1}_z A_z)\cdot(\vec{1}_x B_x+\vec{1}_y B_y+\vec{1}_z B_z)$

$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_x B_x+A_y B_y+A_z B_z$

Velikost $|\vec{A}|=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$

$|\vec{r}|=r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$3\mathrm{D}=(x,y,z)$

$-\infty<x[\mathrm{m}]<+\infty$
$-\infty<y[\mathrm{m}]<+\infty$
$-\infty<z[\mathrm{m}]<+\infty$

Razdalja $|\vec{r}-\vec{r}\,'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$

Vektorski produkt

$\vec{A}\times\vec{B}=(\vec{1}_x A_x+\vec{1}_y A_y+\vec{1}_z A_z)\times(\vec{1}_x B_x+\vec{1}_y B_y+\vec{1}_z B_z)$

$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{1}_x(A_y B_z-A_z B_y)+$
$+\vec{1}_y(A_z B_x-A_x B_z)+\vec{1}_z(A_x B_y-A_y B_x)$

Smerniki $1=\vec{1}_x\cdot\vec{1}_x=\vec{1}_y\cdot\vec{1}_y=\vec{1}_z\cdot\vec{1}_z$

Pravokotni $\vec{1}_x\perp\vec{1}_y\perp\vec{1}_z\perp\vec{1}_x \quad 0=\vec{1}_x\cdot\vec{1}_y=\vec{1}_y\cdot\vec{1}_z=\vec{1}_z\cdot\vec{1}_x$

Desnoročni $\vec{1}_z=\vec{1}_x\times\vec{1}_y \quad \vec{1}_x=\vec{1}_y\times\vec{1}_z \quad \vec{1}_y=\vec{1}_z\times\vec{1}_x$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

V kartezičnem koordinatnem sistemu so vse tri koordinatne osi x, y in z ravne in med sabo pravokotne. Vse tri koordinate imajo merske enote razdalje, torej metri $[\mathrm{m}]$ v sistemu merskih enot MKSA. Pravilo desnega vijaka zagotavlja pisanje koordinat v dogovorjenem vrstnem redu, torej (x,y,z) .

Zelo koristen pripomoček vsakega koordinatnega sistema so smerniki. To so enotni vektorji, ki kažejo v smereh koordinatnega sistema. V izogibanje zmešnjavi razkošja oznak uporabljamo za smernike številko ena, opremljeno s puščico vektorja in indeksom koordinate, kateri pripada. Na primer, smernik $\vec{1}_x$ je enotni vektor v smeri koordinate x .

Smerniki so enotni vektorji, torej $\vec{1}_x\cdot\vec{1}_x=1$. Smerniki so v pravokotnem koordinatnem sistemu med sabo pravokotni. Zapis $\vec{1}_x\perp\vec{1}_y$ je torej povsem enakovreden $\vec{1}_x\cdot\vec{1}_y=0$. Pravilo desnega vijaka zapišemo z vektorskim produktom smernikov $\vec{1}_z=\vec{1}_x\times\vec{1}_y$.

Posebnost kartezičnega koordinatnega sistema je, da so smerniki konstantni vektorji. To pomeni, da v katerikoli točki prostora vsi trije smerniki kartezičnega koordinatnega sistema vedno kažejo v iste tri smeri. V krivočrtnih koordinatnih sistemih, ki so prav tako 3D, pravokotni in desnoročni, to ne velja! Konstantni smerni vektorji in koordinate z merskimi enotami razdalje omogočajo preprost izračun razdalj v kartezičnem koordinatnem sistemu.

S pomočjo smernikov lahko katerikoli vektor razstavimo v treh dimenzijah v tri skalarne komponente. Obratno iz treh skalarnih komponent s pomočjo smernikov dobimo spet prvotni vektor. Zapis vektorja po komponentah znatno poenostavlja računanje z vektorji. Seštevanje dveh vektorjev gre preprosto tako, da seštejemo istoležne komponente.

Skalarni produkt dveh vektorjev razvijemo v devet produktov komponent. Od teh je v pravokotnem koordinatnem sistemu šest produktov enako nič! V skalarnem produktu so različni od nič le trije produkti istoležnih komponent, ki jih preprosto seštejemo.

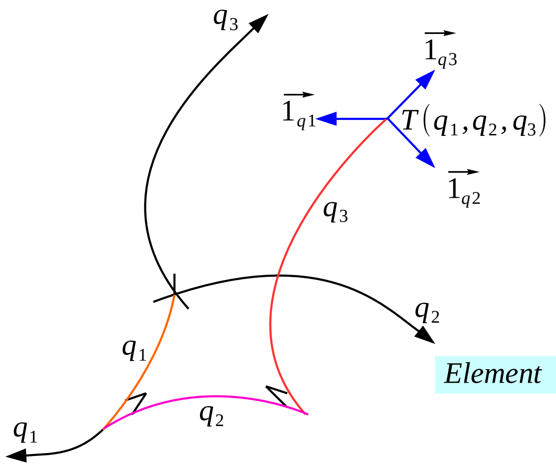
Tudi vektorski produkt dveh vektorjev razvijemo v devet produktov komponent. Od teh so v vektorskem produktu trije produkti istoležnih komponent enaki nič. Ostalih šest od nič različnih produktov komponent izračunamo s pomočjo pravila desnega vijaka za smernike. Navidez kompliciran končni rezultat poenostavimo z zapisom vektorskega produkta v obliki determinante 3×3 , ki ima v gornji vrstici smernike, v srednji vrstici komponente prvega vektorja in v spodnji vrstici komponente drugega vektorja.

Žal kartezične koordinate (x, y, z) niso najbolj primerne za reševanje nekaterih nalog niti niso v izbrani nalogi samoumevne. Marsikatero nalogo preprosteje opišemo v krivočrtnem koordinatnem sistemu s splošnimi koordinatami q_1 , q_2 in q_3 . Krivočrtni koordinatni sistem (q_1, q_2, q_3) sicer izberemo 3D, pravokoten in desnoročen, vendar koordinatne osi mogoče niso vse ravne niti koordinate nimajo nujno vse merskih enot razdalje.

Smernik ima smer tangente na pripadajočo koordinatno os krivočrtnega koordinatnega sistema. Če je koordinatna os ukrivljena oziroma se njena smer spreminja v prostoru, se spreminja smer tangente. Smernik takrat ni konstanten vektor, pač pa je funkcija koordinat (q_1, q_2, q_3) ! Poljuben 3D krivočrtni koordinatni sistem (q_1, q_2, q_3) ima smernike $\overrightarrow{1_{q1}}$, $\overrightarrow{1_{q2}}$ in

$\vec{1}_{q3}$, ki so med sabo pravokotni in določajo pravilo desnega vijaka:

Krivočrtne koordinate



Element dolžine $dl=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$

Povezava s kartezičnimi

$$x=x(q_1,q_2,q_3)$$
$$y=y(q_1,q_2,q_3)$$
$$z=z(q_1,q_2,q_3)$$

$$dl_1=\left(\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}\right)dq_1=h_1\,dq_1$$

Element površine $dA=dl_1 dl_2=h_1 h_2 dq_1 dq_2$

Element prostornine $dV=dl_1 dl_2 dl_3=h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$

$$h_1=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}$$

$3D=(q_1,q_2,q_3)$

$$h_2=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}$$

Enotni vektorji $1=\vec{1}_{q1}\cdot\vec{1}_{q1}=\vec{1}_{q2}\cdot\vec{1}_{q2}=\vec{1}_{q3}\cdot\vec{1}_{q3}$

Pravokotni $\vec{1}_{q1}\perp\vec{1}_{q2}\perp\vec{1}_{q3}\perp\vec{1}_{q1}$ $\quad 0=\vec{1}_{q1}\cdot\vec{1}_{q2}=\vec{1}_{q2}\cdot\vec{1}_{q3}=\vec{1}_{q3}\cdot\vec{1}_{q1}$

$$h_3=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}$$

Desnoročni $\vec{1}_{q3}=\vec{1}_{q1}\times\vec{1}_{q2}$ $\quad \vec{1}_{q1}=\vec{1}_{q2}\times\vec{1}_{q3}$ $\quad \vec{1}_{q2}=\vec{1}_{q3}\times\vec{1}_{q1}$

V krivočrtnem koordinatnem sistemu se zaplete pri izračunu katerekoli razdalje, celo diferencialno majhnih premikov. Za izračun poljubne razdalje moramo krivočrtne koordinate (q_1, q_2, q_3) največkrat pretvoriti v kartezične koordinate (x, y, z) . Pri majhnih premikih pogosto smemo ubrati bližnjico, primeren faktor, ki majhno spremembo ene od krivočrtnih koordinat pretvori v pripadajočo razdaljo.

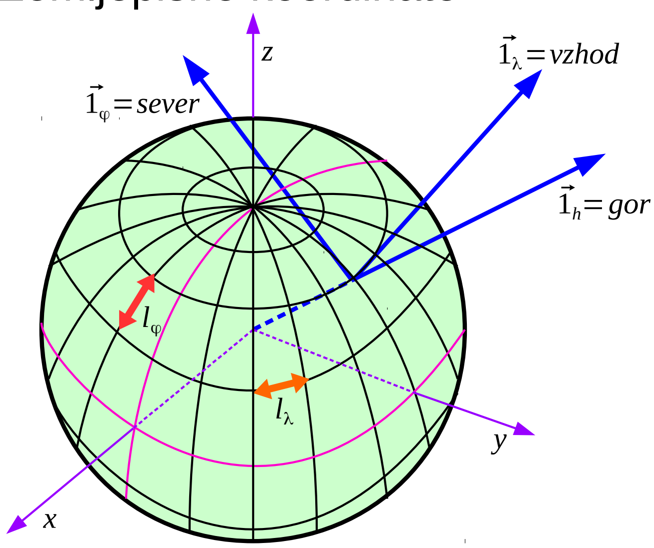
Izračun faktorja pretvorbe majhne spremembe v razdaljo ni vedno preprost oziroma samoumeven. Francoski matematik Gabriel Lamé je pri reševanju nalog v eliptičnih koordinatnih sistemih leta 1859 poiskal splošno pot do faktorjev pretvorbe za diferencialno majhne premike. Laméjevi koeficienti (angleško: scale factors) h_1 , h_2 in h_3 opisujejo pretvorbo diferencialno majhne spremembe ene od koordinat, na primer dq_1 v pripadajočo razdaljo $dl_1=h_1 dq_1$.

Laméjev koeficient h_1 izračunamo iz delnih odvodov vseh treh kartezičnih koordinat $\partial x/\partial q_1$, $\partial y/\partial q_1$ in $\partial z/\partial q_1$ po pripadajoči krivočrtni koordinati. Premik po eni krivočrtni koordinati načeloma povzroči premike po vseh treh kartezičnih koordinatah. Celotno razdaljo premika dobimo s Pitagorovim izrekom. Če izpostavimo dq_1 , je preostanek ravno iskani Laméjev koeficient h_1 .

V diferencialno majhnem elementu dolžine dl nastopa en sam Laméjev koeficient. V diferencialno majhnem elementu površine dA nastopata dva Laméjeva koeficienta. V diferencialno majhnem elementu prostornine dV nastopajo vsi trije Laméjevi koeficienti h_1 , h_2 in h_3 .

Najbolj poljuden primer 3D pravokotnih krivočrtnih koordinat so zemljepisne koordinate: zemljepisna dolžina λ , zemljepisna širina φ in nadmorska višina h . Zemljepisno dolžino in širino merimo v ločnih stopinjah $[^o]$, minutah $[']$ in sekundah $['']$, nadmorsko višino pa v kilometrih $[\mathrm{km}]$ oziroma metrih $[\mathrm{m}]$. Smernik $\vec{1}_\lambda$ kaže na vzhod, smernik $\vec{1}_\varphi$ kaže na sever in smernik $\vec{1}_h$ kaže gor:

Zemljepisne koordinate



Pretvorba $(\lambda, \varphi, h) \rightarrow (x, y, z)$

$$x = (h + R_Z)\cos\left(\frac{\pi}{180^o}\lambda\right)\cos\left(\frac{\pi}{180^o}\varphi\right)$$
$$y = (h + R_Z)\sin\left(\frac{\pi}{180^o}\lambda\right)\cos\left(\frac{\pi}{180^o}\varphi\right)$$
$$z = (h + R_Z)\sin\left(\frac{\pi}{180^o}\varphi\right)$$
$$R_Z \approx 6366\,\mathrm{km}$$

Laméjevi koeficienti

$$h_\lambda = \frac{\pi(h + R_Z)}{180^o}\cos\left(\frac{\pi}{180^o}\varphi\right)$$
$$h_\varphi = \frac{\pi(h + R_Z)}{180^o}$$
$$h_h = 1$$

$$3\mathrm{D} = (\lambda, \varphi, h)$$
$$0^o \le \lambda[^o] < 360^o$$
$$-90^o \le \varphi[^o] \le 90^o$$
$$-R_Z \le h[\mathrm{km}] < +\infty$$

Pravokotni $\vec{1}_\lambda \perp \vec{1}_\varphi \perp \vec{1}_h \perp \vec{1}_\lambda$

Desnoročni $\vec{1}_h = \vec{1}_\lambda \times \vec{1}_\varphi$

Zgled: $\lambda = 330^o \quad \varphi = 45^o \quad h = 0\,\mathrm{km}$

$$h_\lambda = 78.6\,\mathrm{km}/^o$$
$$h_\varphi = 111.1\,\mathrm{km}/^o$$
$$h_h = 1$$
$$\Delta\lambda = 20^o \rightarrow l_\lambda = h_\lambda \Delta\lambda = 1571\,\mathrm{km}$$
$$\Delta\varphi = 20^o \rightarrow l_\varphi = h_\varphi \Delta\varphi = 2222\,\mathrm{km}$$

Pretvorbo zemljepisnih koordinat (λ, φ, h) v kartezične (x, y, z) poenostavimo tako, da privzamemo, da je Zemlja krogla s povprečnim polmerom $R_Z \approx 6366\,\mathrm{km}$. Pri pretvorbi ne smemo pozabiti na merske enote zemljepisne dolžine in širine, kjer je treba stopinje $[^o]$ najprej pretvoriti v radiane $[\mathrm{rd}]$ za trigonometrijske funkcije $\sin$ in $\cos$. Iz znane povezave s kartezičnim koordinatnim sistemom lahko izračunamo

Laméjeve koeficiente h_λ , h_φ in h_h .

V krivočrtnem koordinatnem sistemu so smerniki funkcija koordinat. Na primer, smernik $\vec{1}_h = gor$ kaže v osrednji Evropi drugam kot na Kitajskem, v Novi Zelandiji pa skoraj v obratno smer kot v osrednji Evropi.

Podobno so lahko funkcija krivočrtnih koordinat tudi nekateri oziroma vsi Laméjevi koeficienti. Prekooceanska plovba ($h = 0\,\mathrm{km}$) po poldnevniku ima konstanten Laméjev koeficient zemljepisne širine $h_\varphi = 111.1\,\mathrm{km}/^\mathrm{o}$. Laméjev koeficient zemljepisne dolžine h_λ je odvisen od zemljepisne širine φ , saj so vzporedniki različno dolgi. Pri zemljepisni širini $\varphi = 45^\mathrm{o}$ znaša $h_\lambda = 78.6\,\mathrm{km}/^\mathrm{o}$.

Med premikanjem po kateremkoli poldnevniku za $\Delta\varphi = 20^o$ prepluje ladja $l_\varphi = 2222\,\mathrm{km}$ oziroma natančno $l_\varphi = 20^\mathrm{o} \cdot 60\,\mathrm{nm}/^\mathrm{o} = 1200\,\mathrm{nm}$, saj je navtična milja definirana kot ena ločna stopinja na poldnevniku. Pripadajoči Laméjev koeficient znaša $h_\varphi = 1\,\mathrm{nm}/' = 1.852\,\mathrm{km}/'$ zapisan na ločno minuto. Med plovbo po vzporedniku $45^\mathrm{o}\mathrm{N}$ za $\Delta\lambda = 20^o$ naredi ladja samo $l_\lambda = 1571\,\mathrm{km}$!

V elektrodinamiki izbiramo koordinatne sisteme tako, da je računanje čimbolj enostavno. Povsem jasno želimo tri dimenzije, pravokotnost in desnoročnost. Vse kotne koordinate zato navajamo v radianih $[\mathrm{rd}]$, da so odvodi in integrali kotnih funkcij čimbolj preprosti. Iz podobnega razloga navajamo eksponentne koordinate v logaritemskih enotah Neprih $[\mathrm{Np}]$, da so odvodi in integrali hiperboličnih funkcij čimbolj preprosti.

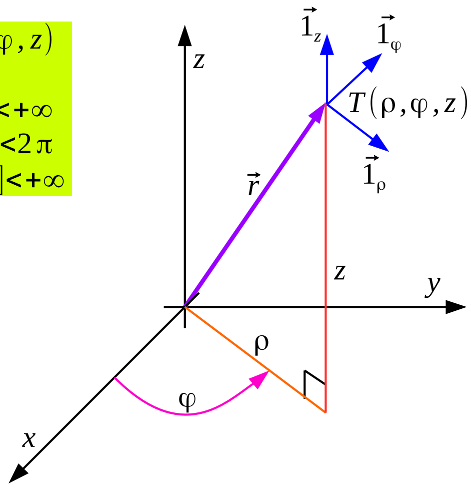
Valjni koordinatni sistem (ρ, φ, z) je smiselna izbira za obravnavo vodnikov krožnega prereza, koaksialnih kablov, kovinskih valovodov krožnega prereza in dielektričnih valovodov krožnega prereza (svetlobno vlakno). Valjne koordinate vključujejo oddaljenost ρ od kartezične osi z , kot φ merjen od kartezične osi x do projekcije na ravnino xy ter višino z nad ravnino xy , ki povsem ustreza enako poimenovani kartezični koordinati z .

Oddaljenost ρ od osi zapisujemo v metrih $[\mathrm{m}]$ in vedno vzamemo pozitivno $0 \le \rho < +\infty$. Kot φ zapisujemo v radianih $[\mathrm{rd}]$ in se lahko giblje v območju $0 \le \varphi < 2\pi$. Pozor, koordinata φ valjnega koordinatnega sistema nima popolnoma nobene povezave z istoimensko koordinato φ zemljepisnega koordinatnega sistema! Povsem enako kot v kartezičnem koordinatnem sistemu tretjo koordinato z zapisujemo v metrih $[\mathrm{m}]$ in za njeno vrednost ni posebnih omejitev:

Valjne koordinate

$$3D = (\rho, \varphi, z)$$

$$0 \le \rho[\mathrm{m}] < +\infty$$
$$0 \le \varphi[\mathrm{rd}] < 2\pi$$
$$-\infty < z[\mathrm{m}] < +\infty$$



Pretvorba $(\rho,\varphi,z) \to (x,y,z)$

$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi$$
$$z = z$$
$$\vec{1}_x = \vec{1}_\rho\cos\varphi - \vec{1}_\varphi\sin\varphi$$
$$\vec{1}_y = \vec{1}_\rho\sin\varphi + \vec{1}_\varphi\cos\varphi$$
$$\vec{1}_z = \vec{1}_z$$

Laméjevi koeficienti

$$h_\rho = 1$$
$$h_\varphi = \rho$$
$$h_z = 1$$

Pretvorba $(x,y,z) \to (\rho,\varphi,z)$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\varphi = \arctan(y/x) \quad (\textit{kvadrant ?})$$
$$z = z$$
$$\vec{1}_\rho = \vec{1}_x\cos\varphi + \vec{1}_y\sin\varphi$$
$$\vec{1}_\varphi = -\vec{1}_x\sin\varphi + \vec{1}_y\cos\varphi$$
$$\vec{1}_z = \vec{1}_z$$

Smerniki $\quad 1 = \vec{1}_\rho\cdot\vec{1}_\rho = \vec{1}_\varphi\cdot\vec{1}_\varphi = \vec{1}_z\cdot\vec{1}_z$

Pravokotni $\quad \vec{1}_\rho \perp \vec{1}_\varphi \perp \vec{1}_z \perp \vec{1}_\rho \quad 0 = \vec{1}_\rho\cdot\vec{1}_\varphi = \vec{1}_\varphi\cdot\vec{1}_z = \vec{1}_z\cdot\vec{1}_\rho$

Desnoročni $\quad \vec{1}_z = \vec{1}_\rho\times\vec{1}_\varphi \quad \vec{1}_\rho = \vec{1}_\varphi\times\vec{1}_z \quad \vec{1}_\varphi = \vec{1}_z\times\vec{1}_\rho$

V valjnem koordinatnem sistemu (ρ,φ,z) sta koordinatni osi ρ in z ravni (premici). Le koordinatna os φ je ukrivljena (krožnica). Laméjev koeficient $h_\varphi=\rho$ je edini, ki je različen od enote, da radiane pretvori v dolžinske enote. Ostala dva Laméjeva koeficienta $h_\rho=h_z=1$ sta enaka enoti.

Pravilo desnega vijaka določa privzeti vrstni red koordinat (ρ,φ,z) oziroma vektorski produkt smernikov $\vec{1}_z=\vec{1}_\rho\times\vec{1}_\varphi$. V valjnem koordinatnem sistemu je edino smernik $\vec{1}_z$ konstanten vektor. Smernika $\vec{1}_\rho$ in $\vec{1}_\varphi$ spreminjata smer v prostoru , bolj točno se oba vrtita s koordinato φ .

Pretvorba valjnih koordinat (ρ,φ,z) v kartezične (x,y,z) je preprosta. Pretvorba v obratni smeri iz kartezičnih (x,y,z) v valjne (ρ,φ,z) naleti na težavo pri izračunu φ , saj funkcija $\arctan(y/x)$ daje rezultat v območju od $-\pi/2$ do $+\pi/2$. Pravilen kvadrant kota φ je torej treba še dodatno določiti iz znanih x in y !

Povezavo med smerniki valjnega in kartezičnega koordinatnega sistema poiščemo tako, da iskani smernik razstavimo na komponente. Na primer, pri iskanju smernika $\vec{1}_\rho=\vec{1}_x(\vec{1}_x\cdot\vec{1}_\rho)+\vec{1}_y(\vec{1}_y\cdot\vec{1}_\rho)+\vec{1}_z(\vec{1}_z\cdot\vec{1}_\rho)$ potrebujemo projekcije $\vec{1}_x\cdot\vec{1}_\rho=\cos\varphi$, $\vec{1}_y\cdot\vec{1}_\rho=\sin\varphi$ in $\vec{1}_z\cdot\vec{1}_\rho=0$. Smernik $\vec{1}_z$ poznamo, saj je isti v obeh koordinatnih sistemih. Preostalo neznanko, smernik $\vec{1}_\varphi=\vec{1}_z\times\vec{1}_\rho$ poiščemo po pravilu desnega vijaka.

Krogelni koordinatni sistem (r,Θ,Φ) je uporaben v vseh nalogah anten, sevanja in razširjanja elektromagnetnih valov. Krogelne koordinate vključujejo oddaljenost r od koordinatnega izhodišča, polarno razdaljo zapisano s kotom Θ ter zemljepisno dolžino zapisano s kotom Φ , ki z izjemo drugačnih merskih enot povsem ustreza zemljepisni dolžini λ zemljepisnih koordinat.

Oddaljenost r od koordinatnega izhodišča zapisujemo v metrih $[\mathrm{m}]$ in vedno vzamemo pozitivno $0\le r<+\infty$. Polarno razdaljo Θ merimo od severnega tečaja v radianih $[\mathrm{rd}]$ in se lahko giblje v območju $0\le\Theta\le\pi$ vse do južnega tečaja, kjer doseže vrednost $\Theta=\pi$. Zemljepisno dolžino Φ merimo od kartezične osi x do projekcije na ravnino xy v radianih $[\mathrm{rd}]$ in se lahko giblje v območju $0\le\Phi<2\pi$:

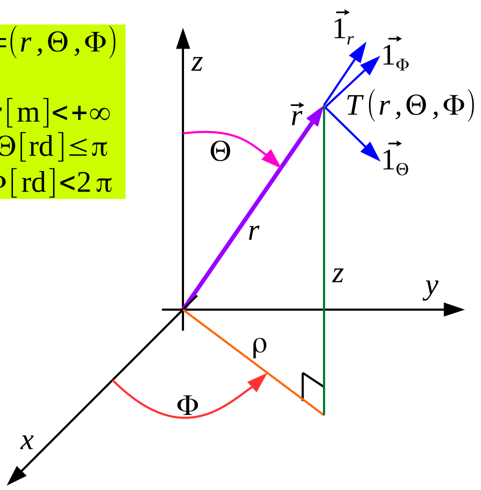
Krogelne koordinate

$3D=(r,\Theta,\Phi)$

$0\le r[\mathrm{m}]<+\infty$

$0\le\Theta[\mathrm{rd}]\le\pi$

$0<\Phi[\mathrm{rd}]<2\pi$



Pretvorba $(r,\Theta,\Phi)\rightarrow(x,y,z)$

$$x=r\sin\Theta\cos\Phi$$
$$y=r\sin\Theta\sin\Phi$$
$$z=r\cos\Theta$$
$$\vec{1}_x=\vec{1}_r\sin\Theta\cos\Phi+\vec{1}_\Theta\cos\Theta\cos\Phi-\vec{1}_\Phi\sin\Phi$$
$$\vec{1}_y=\vec{1}_r\sin\Theta\sin\Phi+\vec{1}_\Theta\cos\Theta\sin\Phi+\vec{1}_\Phi\cos\Phi$$
$$\vec{1}_z=\vec{1}_r\cos\Theta-\vec{1}_\Theta\sin\Theta$$

Pretvorba $(x,y,z)\rightarrow(r,\Theta,\Phi)$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\Theta=\arccos\left(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$
$$\Phi=\arctan(y/x)\quad(kvadrant\,?)$$
$$\vec{1}_r=\vec{1}_x\sin\Theta\cos\Phi+\vec{1}_y\sin\Theta\sin\Phi+\vec{1}_z\cos\Theta$$
$$\vec{1}_\Theta=\vec{1}_x\cos\Theta\cos\Phi+\vec{1}_y\cos\Theta\sin\Phi-\vec{1}_z\cos\Theta$$
$$\vec{1}_\Phi=-\vec{1}_x\sin\Phi+\vec{1}_y\cos\Phi$$

Smerniki $1=\vec{1}_r\cdot\vec{1}_r=\vec{1}_\Theta\cdot\vec{1}_\Theta=\vec{1}_\Phi\cdot\vec{1}_\Phi$

Pravokotni $\vec{1}_r\perp\vec{1}_\Theta\perp\vec{1}_\Phi\perp\vec{1}_r$ $\quad 0=\vec{1}_r\cdot\vec{1}_\Theta=\vec{1}_\Theta\cdot\vec{1}_\Phi=\vec{1}_\Phi\cdot\vec{1}_r$

Desnoročni $\vec{1}_\Phi=\vec{1}_r\times\vec{1}_\Theta$ $\quad\vec{1}_r=\vec{1}_\Theta\times\vec{1}_\Phi$ $\quad\vec{1}_\Theta=\vec{1}_\Phi\times\vec{1}_r$

Laméjevi koeficienti

$$h_r=1$$
$$h_\Theta=r$$
$$h_\Phi=r\sin\Theta$$

V krogelnem koordinatnem sistemu (r,Θ,Φ) je edino koordinatna os r ravna (premica). Ostali dve koordinatni osi sta ukrivljeni (krožnici): Θ raste po poldnevnikih proti južnemu tečaju, Φ raste po vzporednikih na vzhod. Laméjev koeficient $h_r=1$ je edini enak enoti. Ostala dva Laméjeva koeficienta $h_\Theta=r$ in $h_\Phi=r\sin\Theta$ sta različna od enote, da radiane pretvarjata v dolžinske enote.

Pravilo desnega vijaka določa privzeti vrstni red koordinat (r,Θ,Φ) oziroma vektorski produkt smernikov $\vec{1}_\Phi=\vec{1}_r\times\vec{1}_\Theta$. V krogelnem koordinatnem sistemu vsi trije smerniki $\vec{1}_r$, $\vec{1}_\Theta$ in $\vec{1}_\Phi$ spreminjajo smer v prostoru , bolj točno se obračajo s polarno razdaljo Θ oziroma zemljepisno dolžino Φ .

Pretvorba krogelnih koordinat (r,Θ,Φ) v kartezične (x,y,z) je preprosta. Pretvorba v obratni smeri iz kartezičnih (x,y,z) v krogelne (r,Θ,Φ) naleti na težavo pri izračunu Φ , saj funkcija $\arctan(y/x)$ daje rezultat v območju od $-\pi/2$ do $+\pi/2$. Pravilen kvadrant kota Φ je torej treba še dodatno določiti iz znanih x in y ! Povrhu lahko postane izračun polarne razdalje Θ preko funkcije $\arccos$ zelo nenatančen v bližini tečajev!

Zemljepisna dolžina krogelnega koordinatnega sistema je povsem enaka $\Phi(krogla)=\varphi(valj)$ koordinati valjnega koordinatnega sistema. Tudi pripadajoča smerna vektorja sta povsem enaka $1_\Phi(krogla)=1_\varphi(valj)$. Različni oznaki, veliko in malo grško črko »Phi« uporabljamo le zato, da strogo ločimo med krogelnimi koordinatami (r,Θ,Φ) in valjnimi koordinatami (ρ,φ,z) .

Povezavo med smerniki krogelnega in kartezičnega koordinatnega sistema poiščemo tako, da iskani smernik razstavimo na komponente. Na primer, pri iskanju smernika $\vec{1}_r=\vec{1}_x(\vec{1}_x\cdot\vec{1}_r)+\vec{1}_y(\vec{1}_y\cdot\vec{1}_r)+\vec{1}_z(\vec{1}_z\cdot\vec{1}_r)$ potrebujemo projekcije $\vec{1}_x\cdot\vec{1}_r=\sin\Theta\cos\Phi$, $\vec{1}_y\cdot\vec{1}_r=\sin\Theta\sin\Phi$ in $\vec{1}_z\cdot\vec{1}_r=\cos\Theta$. Smernik $\vec{1}_\Phi=\vec{1}_\varphi(valj)=-\vec{1}_x\sin\Phi+\vec{1}_y\cos\Phi$ poznamo, saj je isti vektor kot v valjnem koordinatnem sistemu. Preostalo neznanko, smernik $\vec{1}_\Theta=\vec{1}_\Phi\times\vec{1}_r$ poiščemo po pravilu desnega vijaka.

Opisani poenostavljeni zemljepisni koordinatni sistem je podoben krogelnemu z nekaj preprostimi pretvorbami koordinat. Nadmorski višini prištejemo polmer Zemlje $h(zemljepis)+R_Z=r(krogla)$. Zemljepisno dolžino samo pretvorimo v radiane $\lambda(zemljepis)\cdot\pi/180°=\Phi(krogla)$.

Zemljepisno širino pretvorimo v radiane in odštejemo od pravega kota $\pi/2-\varphi(zemljepis)\cdot\pi/180^{o}=\Theta(krogla)$, da dobimo pripadajočo polarno razdaljo.

Valjno-eliptični koordinatni sistem (u,v,z) je smiselna izbira za obravnavo osamljenih trakastih vodnikov oziroma kovinskega valovoda eliptičnega prereza. Valjno-eliptične koordinate vključujejo (eksponentno) oddaljenost u od goriščnega traku širine $2f$, kot v za opis zasuka v ravnini xy ter višino z nad ravnino xy , ki povsem ustreza enako poimenovani kartezični koordinati z .

Oddaljenost u od osi zapisujemo v logaritemskih enotah $[\mathrm{Np}]$ in vedno vzamemo pozitivno $0\leq u<+\infty$. Dejanske izmere dobimo s pomočjo privzete goriščne razdalje f , ki ima merske enote dolžine $[\mathrm{m}]$. Kot v zapisujemo v radianih $[\mathrm{rd}]$ in se lahko giblje v območju $0\leq v<2\pi$. Povsem enako kot v kartezičnem koordinatnem sistemu tretjo koordinato z zapisujemo v metrih $[\mathrm{m}]$ in za njeno vrednost ni posebnih omejitev:

Valjno-eliptične koordinate

$3\mathrm{D}=(u,v,z)$

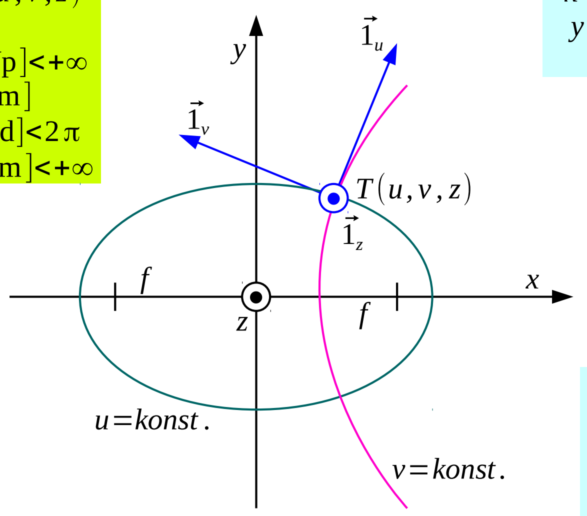
$0\leq u[\mathrm{Np}]<+\infty$
$f[\mathrm{m}]$
$0\leq v[\mathrm{rd}]<2\pi$
$-\infty<z[\mathrm{m}]<+\infty$

$(u,v,z)\rightarrow(x,y,z)$

$$x=f\cosh u\cos v$$
$$y=f\sinh u\sin v$$
$$z=z$$

Približek $u\gg 1$
$(u,v,z)\rightarrow(\rho,\varphi,z)$

$$\rho\approx\frac{f}{2}e^{u}$$
$$\varphi\approx v$$
$$z=z$$



Laméjevi koeficienti

$$h_u=f\sqrt{\sinh^2 u+\sin^2 v}$$
$$h_v=f\sqrt{\sinh^2 u+\sin^2 v}$$
$$h_z=1$$

$$\vec{1}_u=\vec{1}_x(\vec{1}_x\cdot\vec{1}_u)+\vec{1}_y(\vec{1}_y\cdot\vec{1}_u)+\vec{1}_z(\vec{1}_z\cdot\vec{1}_u)$$

$$\vec{1}_x\cdot\vec{1}_u=\frac{dx_u}{dl_u}=\frac{\frac{\partial x}{\partial u}du}{h_u\,du}=\frac{\sinh u\cos v}{\sqrt{\sinh^2 u+\sin^2 v}}$$

$$\vec{1}_u=\frac{\vec{1}_x\sinh u\cos v+\vec{1}_y\cosh u\sin v}{\sqrt{\sinh^2 u+\sin^2 v}}$$

$$\vec{1}_v=\frac{-\vec{1}_x\cosh u\sin v+\vec{1}_y\sinh u\cos v}{\sqrt{\sinh^2 u+\sin^2 v}}$$

Smerniki $1=\vec{1}_u\cdot\vec{1}_u=\vec{1}_v\cdot\vec{1}_v=\vec{1}_z\cdot\vec{1}_z$

Pravokotni $\vec{1}_u\perp\vec{1}_v\perp\vec{1}_z\perp\vec{1}_u$ $\quad 0=\vec{1}_u\cdot\vec{1}_v=\vec{1}_v\cdot\vec{1}_z=\vec{1}_z\cdot\vec{1}_u$

Desnoročni $\vec{1}_z=\vec{1}_u\times\vec{1}_v$ $\quad \vec{1}_u=\vec{1}_v\times\vec{1}_z$ $\quad \vec{1}_v=\vec{1}_z\times\vec{1}_u$

V valjno-eliptičnem koordinatnem sistemu (u,v,z) je edino koordinatna os z ravna (premica). Koordinatni osi u in v sta ukrivljeni. Koordinatna os u je katerakoli hiperbola $v=konst.$, koordinatna os v pa katerakoli elipsa $u=konst.$. Družini hiperbol in elips imata skupni privzeti gorišči na razdalji $2f$.

Laméjev koeficient $h_z=1$ je edini enak enoti. Ostala dva Laméjeva koeficienta $h_u=h_v=f\sqrt{\sinh^2 u+\sin^2 v}$ sta med sabo enaka, čeprav prvi pretvarja Nepre $[\mathrm{Np}]$ v dolžinske enote $[\mathrm{m}]$, drugi pa radiane $[\mathrm{rd}]$ v dolžinske enote $[\mathrm{m}]$.

Pravilo desnega vijaka določa privzeti vrstni red koordinat (u,v,z) oziroma vektorski produkt smernikov $\vec{1}_z=\vec{1}_u\times\vec{1}_v$. V valjno-eliptičnem koordinatnem sistemu je edino smernik $\vec{1}_z$ konstanten vektor. Smernika $\vec{1}_u$ in $\vec{1}_v$ spreminjata smer v prostoru s koordinatama u in v .

Na velikih oddaljenostih $u\gg 1$ od osi z preidejo valjno-eliptične koordinate (u,v,z) v navadne valjne koordinate (ρ,φ,z) . Hiperbole $v=konst.$ se približajo premicam $\varphi=konst.$ (asimptotam). Elipse $u=konst.$ se približajo krogom $\rho=konst.$. Kota $v\approx\varphi$ na velikih razdaljah sovpadeta. Oddaljenost $\rho\approx f/2\cdot e^u$ od osi z določimo s približkom hiperboličnih funkcij.

Povezavo med smerniki valjno-eliptičnega in kartezičnega koordinatnega sistema poiščemo tako, da iskani smernik razstavimo na komponente. V valjno-eliptičnih koordinatah projekcije smernikov niso samoumevne kot v valjnih ali krogelnih koordinatah, zato jih poiščemo z odvodi premikov. Na primer, projekcija $\vec{1}_x\cdot\vec{1}_u=dx_u/dl_u$ je enaka premiku dx_u v smeri osi x deljenemu s celotnim premikom dl_u , oba pri spremembi eliptične koordinate du . Premik v smeri x dobimo z delnim odvodom $dx_u=(\partial x/\partial u)du$, celoten premik pa z Laméjevim koeficientom $dl_u=h_u du$.

Krogelni koordinatni sistem (r,Θ,Φ) ima v eliptičnem svetu dva sorodnika. Ravnino elipse lahko zavrtimo okoli velike osi ali pa okoli male osi elipse. Glede na izbiro osi vrtenja elipse dobimo dva različna elipsoida, ki sta osnova dveh različnih krogelno-eliptičnih koordinatnih sistemov.

Vrtenina okoli velike osi je podolgovat (angleško: prolate) rotacijski elipsoid. Pripadajoči podolgovati krogelno-eliptični koordinatni sistem je uporaben za obravnavo osamljenih kovinskih, dielektričnih oziroma feromagnetnih palic.

Vrtenina okoli male osi je sploščen (angleško: oblate) rotacijski elipsoid. Pripadajoči sploščeni krogelno-eliptični koordinatni sistem je uporaben za obravnavo osamljene krožne kovinske plošče. Sploščeni krogelno-eliptični koordinatni sistem se uporablja tudi za natančnejše zemljepisne koordinate.

Oba opisana krogelno-eliptična koordinatna sistema zapisujeta prvi dve koordinati na podoben način kot $u[\mathrm{Np}]$ in $v[\mathrm{rd}]$ v valjno-eliptičnem koordinatnem sistemu. Tretja koordinata je zemljepisna dolžina $\Phi[\mathrm{rd}]$, merjena okoli osi vrtenine. Oba krogelno-eliptična koordinatna sistema na velikih razdaljah sovpadeta z navadnimi krogelnimi koordinatami (r, Θ, Φ).

Poleg omenjenih dveh krogelno-eliptičnih koordinatnih sistemov obstaja še pisana množica najrazličnejših 3D koordinatnih sistemov. Ker se v elektrodinamiki uporabljajo bolj poredko, se opisovanje koordinatnih sistemov tu zaključuje.

* * * * *