10. Poyntingov izrek

Vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ in skalarni potencial $V(\vec{r})$ sta uporabno matematično orodje za reševanje elektrotehničnih nalog. Ime potencial sicer namiguje na normirano energijo v prostoru. Takšna fizikalna utemeljitev je smiselna, saj sta oba potenciala tesno povezana z energijo premikajočih in mirujočih elektrin.

V elektrostatiki $\omega=0$ določata energijo mirujočih elektrin v prostoru električna poljska jakost $\vec{E}(\vec{r})$ in gostota električnega pretoka $\vec{D}(\vec{r})$. Skalarni produkt $\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{D}(\vec{r})$ določa gostoto električne energije v poljubni točki prostora. Celotno električno energijo dobimo tako, da gostoto energije seštejemo (integriramo) povsod tam, kjer je električna poljska jakost $\vec{E}(\vec{r})\neq 0$ različna od nič:

Električna energija $$W_e=\frac{1}{2}\iiint_{V'(\vec{E}\neq 0)}\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{D}(\vec{r})\,dV'=\frac{1}{2}QU=\frac{1}{2}CU^2$$

$\omega=0 \rightarrow \Delta V=-\frac{\rho}{\epsilon}$ $$\operatorname{div}(\epsilon V \operatorname{grad} V)=(\operatorname{grad}\epsilon V)\cdot(\operatorname{grad} V)+\epsilon V\Delta V=\vec{D}\cdot\vec{E}-V\rho$$

$$V(\infty)=0 \rightarrow \iiint_{V'\rightarrow\infty}\operatorname{div}(\epsilon V\operatorname{grad}V)\,dV'=\oiint_{A\rightarrow\infty}(\epsilon V\operatorname{grad}V)\cdot\vec{1}_n\,dA=0=\iiint_{V'\rightarrow\infty}(\vec{E}\cdot\vec{D}-\rho V)\,dV$$

$$W=\frac{1}{2}\iiint_{V'(\rho\neq 0)}\rho(\vec{r})V(\vec{r})\,dV'=\frac{1}{2}\sum_i Q_i V_i$$

Magnetna energija $$W_m=\frac{1}{2}\iiint_{V'(\vec{H}\neq 0)}\vec{H}(\vec{r})\cdot\vec{B}(\vec{r})\,dV=\frac{1}{2}\Phi I=\frac{1}{2}LI^2$$

$\omega=0 \rightarrow \vec{J}=\operatorname{rot}\vec{H}$ $$\operatorname{div}(\vec{A}\times\vec{H})=\vec{H}\cdot\operatorname{rot}\vec{A}-\vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{H}=\vec{H}\cdot\vec{B}-\vec{A}\cdot\vec{J}$$

$$\vec{A}(\infty)=0 \rightarrow \iiint_{V'\rightarrow\infty}\operatorname{div}(\vec{A}\times\vec{H})\,dV'=\oiint_{A\rightarrow\infty}(\vec{A}\times\vec{H})\cdot\vec{1}_n\,dA=0=\iiint_{V'\rightarrow\infty}(\vec{H}\cdot\vec{B}-\vec{J}\cdot\vec{A})\,dV'$$

$$W=\frac{1}{2}\iiint_{V'(\vec{J}\neq 0)}\vec{J}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})\,dV'$$

Z uvedbo skalarnega potenciala $V(\vec{r})$ lahko celotno električno energijo izračunamo tudi na drugačen način. Pri izpeljavi uporabimo poenostavljeno valovno enačbo $\Delta V=-\rho/\epsilon$ za statiko $\omega=0$. Hkrati moramo privzeti, da je skalarni potencial v neskončnosti $V(\infty)=0$ enak nič. Seštevamo (integriramo) le tam, kjer je gostota prostorske elektrine $\rho(\vec{r}) \neq 0$ različna od nič. Izračun se še dodatno poenostavi, če poznamo potenciale elektrod V_i in pripadajoče elektrine na njih Q_i. Žal poenostavljen račun ne pove, kje se dejansko nahaja električna energija v prostoru.

V magnetostatiki $\omega = 0$ določata energijo enakomerno premikajočih elektrin v prostoru magnetna poljska jakost $\vec{H}(\vec{r})$ in gostota magnetnega pretoka $\vec{B}(\vec{r})$. Skalarni produkt $\vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r})$ določa gostoto magnetne energije v poljubni točki prostora. Celotno magnetno energijo dobimo tako, da gostoto energije seštejemo (integriramo) povsod tam, kjer je magnetna poljska jakost $\vec{H}(\vec{r}) \neq 0$ različna od nič.

Z uvedbo vektorskega potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ lahko celotno magnetno energijo izračunamo tudi na drugačen način. Pri izpeljavi uporabimo poenostavljen Ampèrejev zakon $\mathrm{rot}\, \vec{H} = \vec{J}$ za statiko $\omega = 0$. Hkrati moramo privzeti, da je vektorski potencial v neskončnosti $\vec{A}(\infty) = 0$ enak nič. Seštevamo (integriramo) le tam, kjer je gostota električnega toka $\vec{J}(\vec{r}) \neq 0$ različna od nič. Žal poenostavljen račun ne pove, kje se dejansko nahaja magnetna energija v prostoru.

V električnih vezjih sposobnost hranjenja električne energije opisuje kapacitivnost C kondenzatorjev. Sposobnost hranjenja magnetne energije opisujeta lastna induktivnost L in medsebojna induktivnost M tuljav. Podobno kot skalarni potencial $V(\vec{r})$ pomaga določiti kapacitivnost C kondenzatorjev, lahko vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ pomaga določiti lastno induktivnost L oziroma medsebojno induktivnost M tuljav.

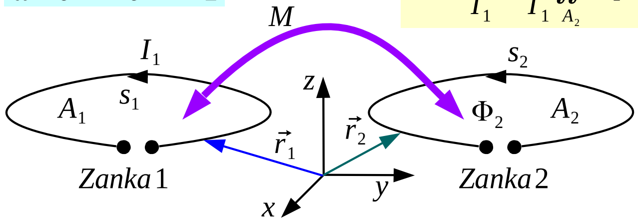
Pri določanju medsebojne induktivnosti M izračunamo celoten magnetni pretok Φ s seštevanjem gostote magnetnega pretoka $\vec{B}_1$ skozi presek A_2 izbrane tuljave oziroma žične zanke. Seštevanje $\vec{B}_1 = \mathrm{rot}\, \vec{A}_1$ po preseku tuljave prevedemo s pomočjo Stokesovega izreka oziroma definicije vrtinčenja na krivuljni integral vektorskega potenciala $\vec{A}_1$ po sklenjeni zanki.

Sam vektorski potencial $\vec{A}_1$ izračunamo s pomočjo obrazca za zakasnjeni potencial. Ker je medsebojna induktivnost M definirana samo za nizke frekvence oziroma statiko $\omega = 0$, kjer so zakasnitve v prostoru nepomembne, zaostajanja faze ni treba upoštevati. Oba računa lahko združimo v skupni izraz za medsebojno induktivnost, kjer magnetne veličine niti vektorski produkt sploh ne nastopajo:

Medsebojna induktivnost

$$\omega=0 \;\rightarrow\; e^{-jkr}=1$$

$$M=\frac{\Phi_2}{I_1}=\frac{1}{I_1}\iint_{A_2}\vec{B}_1\cdot\vec{1}_n\,dA_2=\frac{1}{I_1}\iint_{A_2}\mathrm{rot}\,\vec{A}_1\cdot\vec{1}_n\,dA_2=\frac{1}{I_1}\oint_{s_2}\vec{A}_1\cdot\vec{1}_{s2}\,ds_2$$



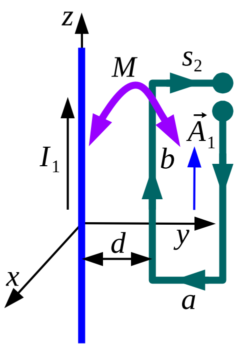
$$\vec{A}_1=\frac{\mu}{4\pi}\oint_{s_1}\frac{\vec{1}_{s1}I_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}ds_1$$

$$M=\frac{\mu}{4\pi}\oint_{s_1}\oint_{s_2}\frac{\vec{1}_{s1}\cdot\vec{1}_{s2}}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}ds_1\,ds_2$$

Zgled

$$\vec{A}_1=\frac{\mu}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{1}_z I_1}{\sqrt{\rho^2+z'^2}}dz'=\vec{1}_z\frac{\mu I_1}{4\pi}\lim_{h\to\infty}\int_{-h}^{+h}\frac{dz'}{\sqrt{\rho^2+z'^2}}=\vec{1}_z\frac{\mu I_1}{4\pi}\lim_{h\gg\rho}\ln\frac{h+\sqrt{\rho^2+h^2}}{-h+\sqrt{\rho^2+h^2}}$$

$$\vec{A}_1=\vec{1}_z\frac{\mu I_1}{4\pi}\lim_{h\gg\rho}\ln\frac{\left(h+\sqrt{\rho^2+h^2}\right)^2}{\rho^2}=\vec{1}_z\frac{\mu I_1}{2\pi}\left(\lim_{h\gg\rho}\ln\left(h+\sqrt{\rho^2+h^2}\right)-\ln\rho\right)$$



$$\vec{A}_1\approx\vec{1}_z\frac{\mu I_1}{2\pi}(C-\ln\rho)$$

$$\lim_{h\gg\rho}\ln\left(h+\sqrt{\rho^2+h^2}\right)\approx\lim_{h\gg\rho}\ln\left(2h+\frac{\rho^2}{2h}\right)\approx\lim_{h\gg\rho}\ln 2h=C$$

$$M=\frac{1}{I_1}\oint_{s_2}\vec{A}_1\cdot\vec{1}_{s2}\,ds_2=\frac{1}{I_1}\left(\vec{A}_1(\rho=d)\cdot\vec{1}_z b-\vec{A}_1(\rho=d+a)\cdot\vec{1}_z b\right)\approx\frac{\mu b}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$

Medsebojna induktivnost sicer lahko ima oba predznaka glede na izbiro priključkov obeh tuljav. Povsem jasno predznak medsebojne induktivnosti ne sme biti odvisen od izbire desnoročnega ali levoročnega koordinatnega sistema niti od izbire predznaka magnetnih veličin v Maxwellovih enačbah.

Dodatno račun medsebojne induktivnosti preko vektorskega potenciala znižuje red naloge. Izračun gostote magnetnega pretoka $\vec{B}_1$ prve zanke je eno-dimenzijski integral, seštevanje $\vec{B}_1$ po preseku A_2 druge zanke je dvo-dimenzijski integral, skupaj torej integracija v treh dimenzijah.

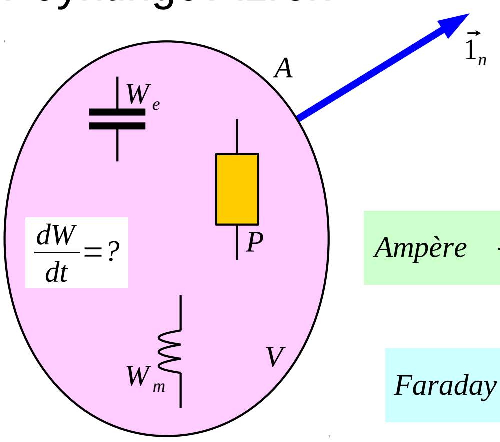
Izračun vektorskega potenciala $\vec{A}_1$ prve zanke je eno-dimenzijski integral, seštevanje $\vec{A}_1$ po krivulji s_2 druge zanke je eno-dimenzijski integral. Skupaj torej integracija v dveh dimenzijah oziroma ena dimenzija manj glede na račun preko $\vec{B}_1$, kar pri številskem reševanju nalog sploh ni zanemarljivo!

Kot zgled je prikazan izračun medsebojne induktivnosti med zelo dolgim vodnikom v osi z in pravokotno žično zanko s stranicama a in b na oddaljenosti d od dolgega vodnika. Pri izračunu vektorskega potenciala $\vec{A}_1$ naletimo na težavo, slednji postane neskončno velik za neskončno dolg vodnik. Vektorski potencial $\vec{A}_1$ zato izračunamo za zelo dolg vodnik dolžine $2h$, kjer velja $h \gg \rho$ v področju pravokotne zanke.

Vektorski potencial $\vec{A}_1(\rho)$ je v bližnji okolici zanke odvisen samo od ρ. Vse ostalo združimo v eno veliko konstanto C, ki ni odvisna od ρ v področju zanke. Konstanta C se pri integraciji vzdolž stranic b natančno odšteje. Integracija vzdolž stranic a ne daje nobenega rezultata, saj so vektorji v skalarnem produktu pravokotni med sabo. Končni rezultat je seveda popolnoma enak tistemu iz osnov elektrotehnike z neposrednim izračunom $\vec{B}_1$ in njegovo integracijo po površini zanke.

V elektrodinamiki imamo običajno prisotni obe vrsti energije: električno energijo W_e mirujočih elektrin in magnetno energijo W_m premikajočih elektrin. Povrhu se lahko energija v elektrodinamiki s časom spreminja oziroma potuje po prostoru. Izračun odvoda skupne energije po času dW/dt je opisal Maxwellov učenec John Henry Poynting leta 1884:

Poyntingov izrek



$$W = W_e + W_m = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{E}\cdot\vec{D}\,dV + \frac{1}{2}\iiint_V \vec{H}\cdot\vec{B}\,dV$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\iiint_V \vec{E}\cdot\vec{D}\,dV\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\iiint_V \vec{H}\cdot\vec{B}\,dV\right]$$

$$Ampère \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\vec{H} - \vec{J} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\right] = \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{H} - \vec{E}\cdot\vec{J}$$

$$Faraday \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\vec{E} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right] = \vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E}$$

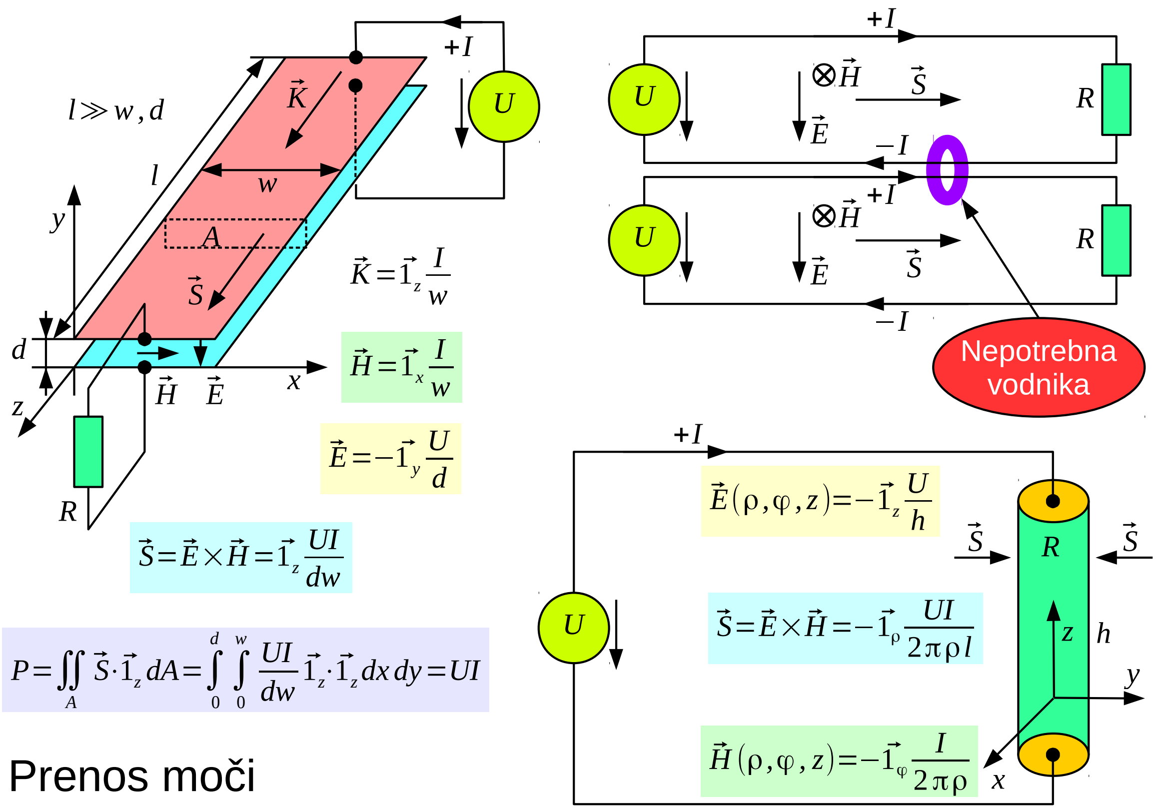
$$\frac{dW}{dt} = \iiint_V \vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{H}\,dV - \iiint_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,dV - \iiint_V \vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E}\,dV$$

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_V (\vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{H} - \vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E})\,dV - \iiint_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,dV = -\iiint_V \mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{H})\,dV - P \qquad P = \iiint_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,dV$$

$$\frac{dW}{dt} = -\oint\!\!\oint_A (\vec{E}\times\vec{H})\cdot\vec{1}_n\,dA - \iiint_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,dV = -\oint\!\!\oint_A \vec{S}\cdot\vec{1}_n\,dA - P \qquad \vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$$

V izbrani prostornini V se skupna energija W, shranjena v kondenzatorjih kot W_e in v tuljavah kot W_m, zmanjšuje iz dveh razlogov. Prvič, energija W lahko odteka (ali priteka) skozi sklenjeno ploskev A, ki oklepa izbrano prostornino V. Drugič, energija W se lahko pretvarja v toploto kot moč P na uporih R znotraj prostornine V.

Gostoto pretoka moči skozi izbrano ploskev A opisuje Poyntingov vektor $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$, ki ima merske enote $[\mathrm{W/m^2}]$. Poyntingov vektor odgovori na vprašanje, kje sploh potuje električna moč po prostoru? V primeru trakastega dvovoda imamo od nič različni električno poljsko jakost $\vec{E}$ in magnetno poljsko jakost $\vec{H}$ v praznem prostoru med trakovoma. Moč torej ne potuje po kovinskih trakovih, pač pa po vmesnem praznem prostoru:



Prenos moči

Če namestimo dve takšni napravi eno nad drugo: dva enaka vira, dva enaka trakasta dvovoda in dve enaki bremeni, hitro ugotovimo, da sta srednja vodnika povsem odveč. Električni tok po teh dveh sicer teče, ampak v nasprotnih smereh, da je vsota enaka nič. Če oba srednja vodnika izločimo in zaporedno vežemo vira na eni strani ter bremeni na drugi strani, se pretok električne moči prav nič ne spremeni.

Če izračunamo električno polje $\vec{E}$ in magnetno polje $\vec{H}$ v okolici valjastega upora, lahko ugotovimo, kako električna moč vstopa v upor. Električna moč vstopa v upor bočno v smeri $-\vec{1}_\rho$ iz praznega prostora. Električni tok teče skozi upor skozi priključka v osi v smeri $-\vec{1}_z$, torej pravokotno na pretok moči!

V frekvenčnem prostoru upoštevamo, da sta $\vec{E}$ in $\vec{H}$ kazalca in sta običajno navedena z vršnimi vrednostmi, ko ni izrecno drugače označeno. Medsebojni fazni kot dobimo preko konjugirano-kompleksne vrednosti magnetne poljske jakosti $\vec{H}*$. Poyntingov vektor je tedaj kompleksen:

$$\vec{S}=\frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}*=\overrightarrow{E_{eff}}\times\overrightarrow{H_{eff}}*$$

Podobno kot pri kompleksni moči $P=UI*/2$ predstavlja realni del Poyntingovega vektorja $\mathrm{Re}[\vec{S}]$ gostoto delovne moči. Imaginarni del Poyntingovega vektorja $\mathrm{Im}[\vec{S}]$ predstavlja gostoto jalove moči oziroma je merilo za energijo, ki niha v prostoru.

Poyntingov vektor $\vec{S}$ je popolnoma definiran tudi takrat, ko smeri vektorjev $\vec{E}$ in $\vec{H}$ sploh ne poznamo natančno. Primer je sončna svetloba, ki je nepolarizirano valovanje v dokaj širokem frekvenčnem spektru. Ne poznamo niti točne frekvence niti smeri vektorjev $\vec{E}$ in $\vec{H}$ sončne svetlobe.

V neposredni bližini Zemlje znaša Poyntingov vektor sončne svetlobe $\vec{S}_v=\vec{1}_r 1400\,\mathrm{W/m^2}$ v vesolju, kjer smernik $\vec{1}_r$ kaže proč od Sonca. Ozračje vpije in odbije nekaj sončne svetlobe, da površino Zemlje doseže komaj $\vec{S}_z=\vec{1}_r 1000\,\mathrm{W/m^2}$ ob lepem jasnem dnevu. Vsa ta električna moč prepotuje razdaljo skoraj $r=150\cdot10^6\,\mathrm{km}$ od Sonca do Zemlje po povsem praznem prostoru, brez kakršnihkoli kovinskih vodnikov.

Poyntingov vektor $\vec{S}$ je od vseh opisanih fizikalnih veličin tista, ki nam najbolj nazorno opisuje dogajanje v električni napravi. Poyntingov vektor $\vec{S}$ tudi preprosto merimo, na primer preko količine toplote, ki se razvija v črnem telesu. Podobno kot električna moč P niti Poyntingov vektor $\vec{S}$ ne nosi informacije o fazi, frekvenci, spektru ali polarizaciji elektromagnetnega polja.

* * * * *