Prostor Minkowskega

B. Jurčič Zlobec

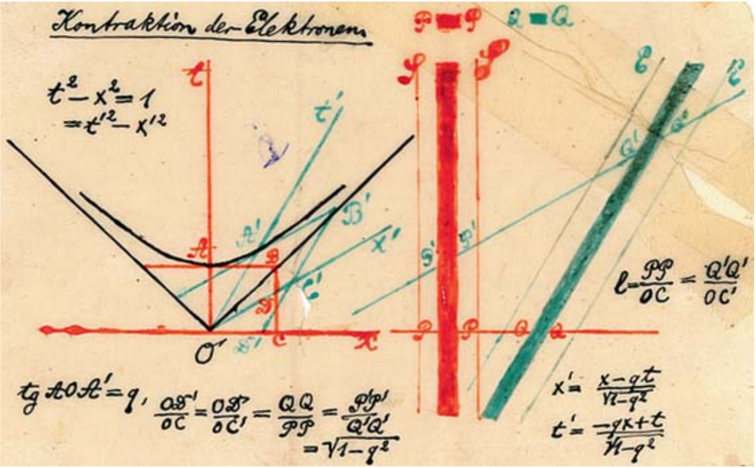
ADJ, 15. april 2014

Hermann Minkowski (1864-1909)
Litvansko-Nemški matematrik.

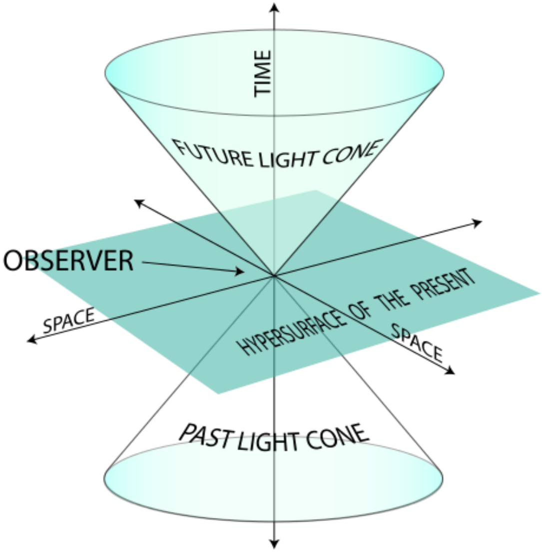
Minkowski je leta 1907 ugotovil, da se posebna teorija relativnosti, ki jo je objavil Albert Einstein leta 1905, osnovana v delih Lorentza in Poincaéja, lahko opiše najpreprostejše v štiridimenzionalnem prostoru, ki je od takrat znan kot *prostor–čas Minkowskega*. V tem prostoru, prostor in čas nista ločena, ampak sta prepletena v štiridimenzionalni prostor–čas.

Predstavili bomo Lorentzovo geometrijo posebne teorije relativnosti v prostoru Minkovskega.

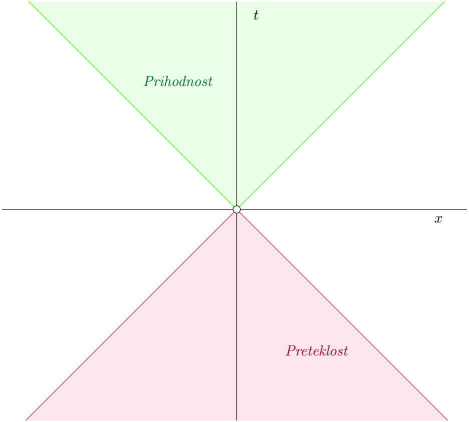
Minkowski, zapiski



Prostor čas

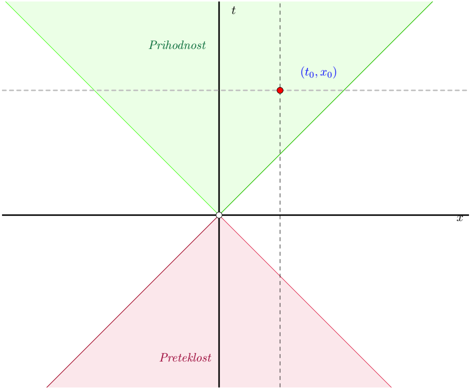

TIME
FUTURE LIGHT CONE
OBSERVER
SPACE
HYPERSURFACE OF THE PRESENT
SPACE
PAST LIGHT CONE

Enidimenzionalni prostor–čas



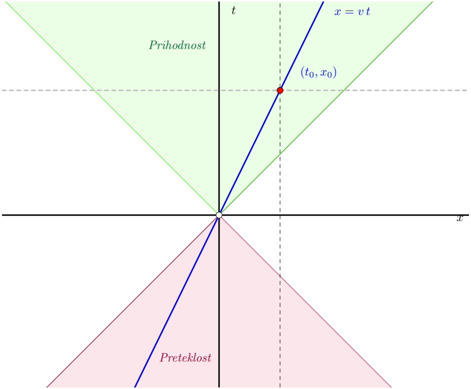
Naš prostor–čas bo imel le eno samo prostorsko dimenzijo. Tako, da ga lahko predstavimo v ravnini. Enote izberemo tako, da je svetlobna hitrost enaka $c = 1$. Hitrosti merimo v deležih svetlobne hitrosti. Svetlobni žarek potuje po poteh, ki so vzporedne s premicama $x = \pm t$.

Svetovnica



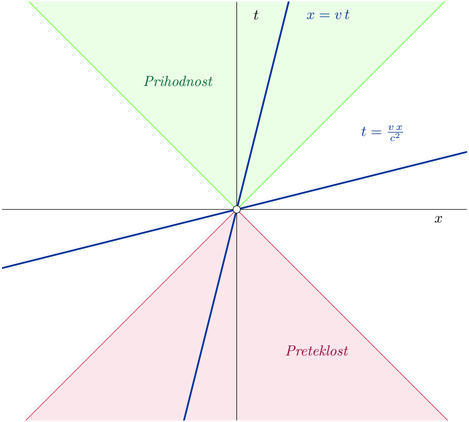
Točko prostoru–času imenujemo dogodek. Prostorska koordinata je x, ki pove kje, medtem ko njena časovna koordinata t pove kdaj, se je dani dogodek zgodil. Množica dogodkov, ki v vsakem trenutju predstavlja položaj delca, bomo imenovali *svetovnico* delca.

Enakomerno gibanje



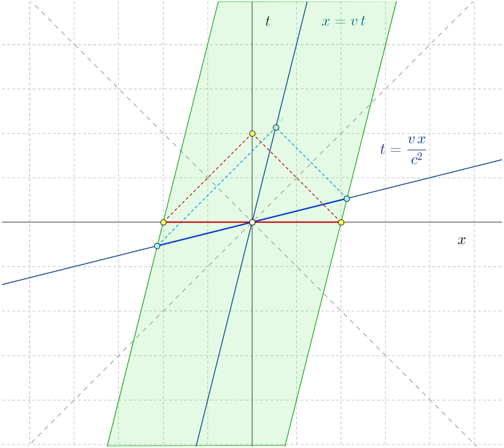
Svetovnica delca, ki se v času 0 nahaja v koordinatnem izhodišču, in se giblje enakomerno s hitrostjo v v smeri pozitivnega poltraka prostorske osi, je premica $x = v\,t$. V času t_0 se delec nahaja v točki x_0.

Enakomerno gibanje



Kako opisati koordinatni sistem v katerem miruje delec, ki se giblje enakomerno v našem koordinatnem sistemu. Svetovnica delca teče po časovni osi sistema v katerem miruje. Prostorsko os sestavljajo dogodki, ki so istočasni dogodku $(0, 0)$.

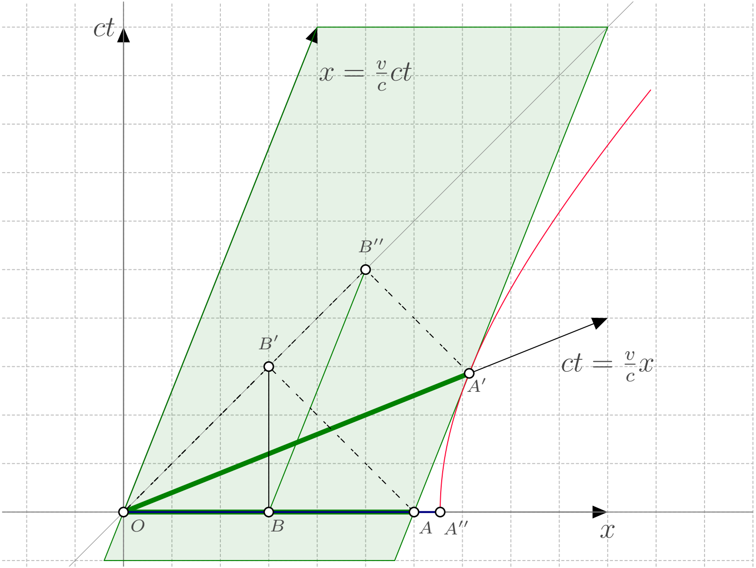
Istočasnost



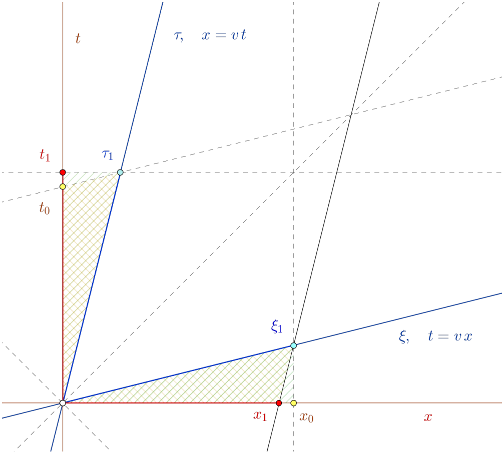
Istočasnost dogodkov v prostoru Minkowskega, kot jo vidi opazovalec, ki se giblje enakomerno, se razlikuje od istočasnosti, kot jo vidi mirujoči opazovalec.

Dva dogodka sta za opazovalca istočasna, če svetlobna signala prideta od njiju do opazovalca istočasno.

Istočasnost



Razteg časa in skrčenje dolžin



Premica skozi točko $(t_1, v\,t_1)$ in smernim koeficientom v, seka t-os v $(t_0, 0)$.

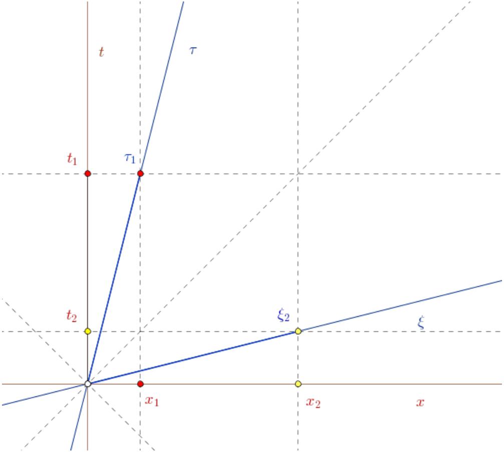
$$\overset{t_0}{\cancel{t}} - t_1 = v(\overset{0}{\cancel{x}} - vt_1)$$

$$t_0 = t_1(1 - v^2),$$
$$x_1 = x_0(1 - v^2)$$

od tod dobimo

$$\tau_1 = t_1\sqrt{1 - v^2}$$
$$\xi_1 = \frac{x_1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Pitagorjev izrek

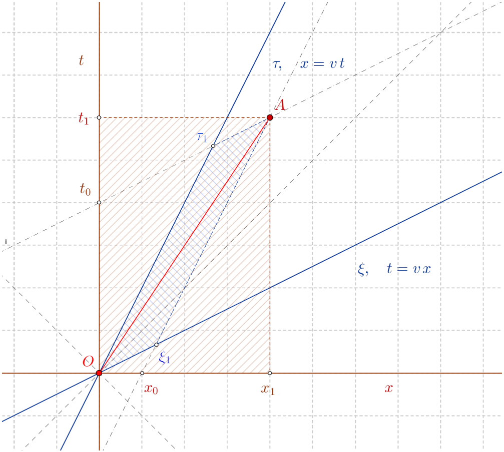


$$\tau_1 = t_1 \sqrt{1 - v^2}$$

$$\tau_1 = t_1 \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{t_1^2}}$$

$$\tau_1^2 = t_1^2 - x_1^2$$

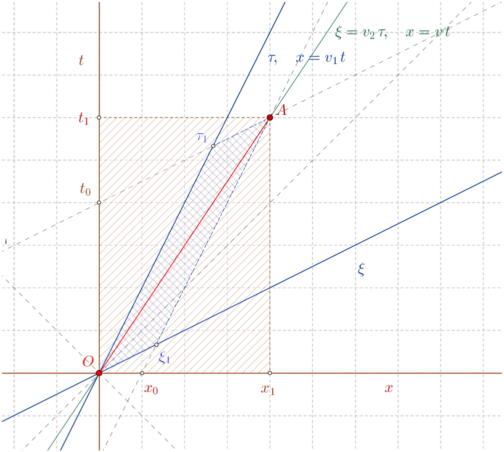
$$\xi_2^2 = x_2^2 - t_2^2$$



Lastni čas delca na poti od točke O do A izračunamo v obeh koordinatnih sistemih enako.

$$\tau_1^2 = t_0^2/(1 - v^2)$$
$$\xi_1^2 = x_0^2/(1 - v^2)$$
$$t_0 = t_1 - v\,x_1$$
$$x_0 = x_1 - v\,t_1$$

$$t_1^2 - x_1^2 = \tau_1^2 - \xi_1^2$$



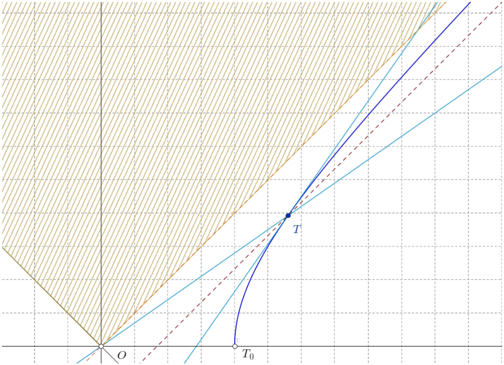
Hitrost v_2 je hitrost delca glede na koordinatni sistem (τ, ξ), ki se giblje s hitrostjo v_1 v koordinatnem sistemu (t, x). Kolika je hitrost v delca v koordinatnem sistemu (x, y).

$$v_2 = \frac{x_0}{t_0} = \frac{t_1 - v\,x_1}{x_1 - v\,t_1}$$

$$v_2 = \frac{-v + \frac{x_1}{t_1}}{1 - v\frac{x_1}{t_1}}$$

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}$$

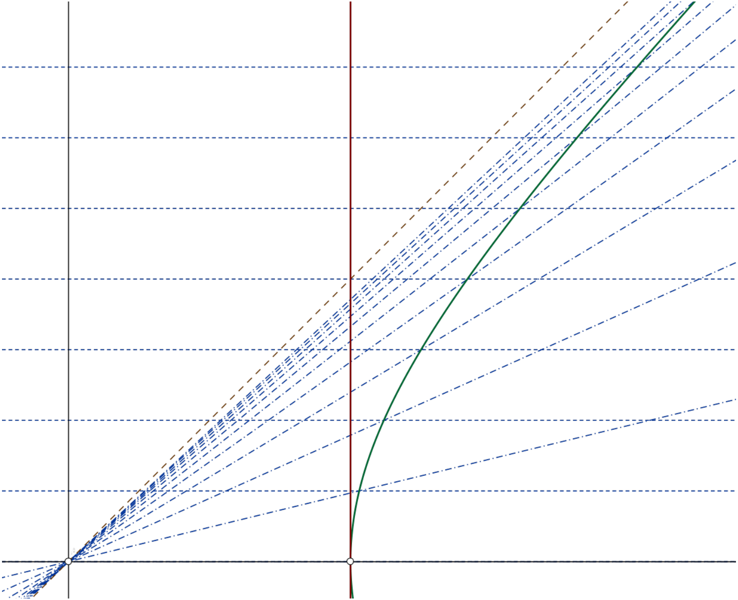
Pospešeno gibanje



Svetovnica delca, ki se giblje enakomerno pospešeno. Pospešek g. Hitrost ne preseže svetlobne hitrosti. Točka O je, s stališča delca, zamrznjena v času, od nje se delec ne oddaljuje. Razdalja ostaja c^2/g.

$$x(t) = \frac{c^2}{g}\sqrt{1 + \left(\frac{g\,t}{c}\right)^2}$$

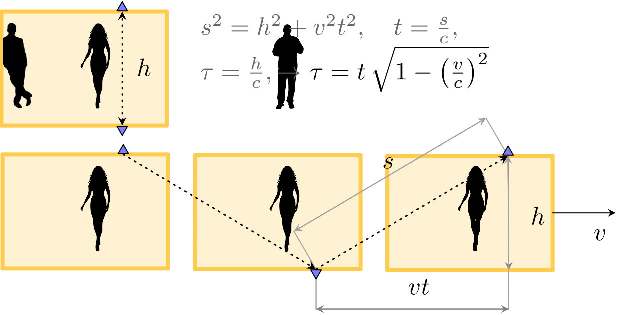
Pospešeno gibanje



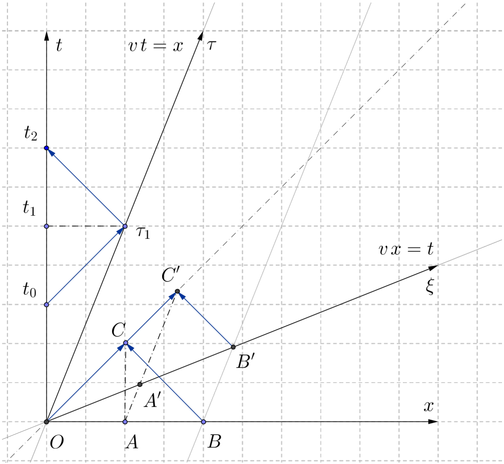
Alenka in Branko

$$s^2 = h^2 + v^2 t^2, \quad t = \frac{s}{c},$$

$$\tau = \frac{h}{c}, \rightarrow \tau = t\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$



Alenka in Branko v prostoru Minkowskega



$$t_2 = 2t_1 - t_0.$$

$$t_1 = \frac{t_0}{1 - v}$$

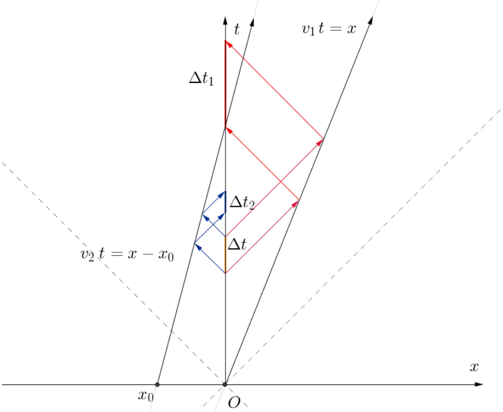
$$t_2 = t_0 \frac{1 + v}{1 - v}$$

$$t_2 = k\tau_1$$

$$k^2 = \frac{1 + v}{1 - v}$$

$$t_2 = \tau_1 \sqrt{\frac{1 + v}{1 - v}}$$

Dopplerjev pojav



V razmaku Δt pošljemo signala dvema opazovalcema eden se oddaljuje od nas s hitrostjo v_1, drugi se nam približuje s hitrostjo v_2.

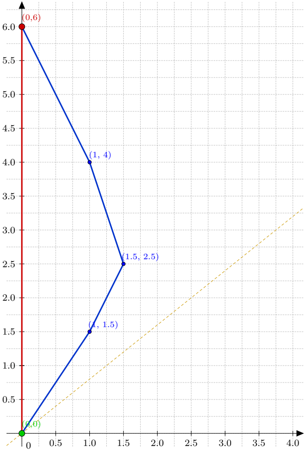
$$\Delta t_1 = \Delta t \frac{1 + v_1}{1 - v_1}$$

$$\Delta t_2 = \Delta t \frac{-1 + v_2}{-1 - v_2}$$

V drugem primeru je svetlobna hitrost -1.

$$\lambda_1 = \lambda \sqrt{\frac{c + v_1}{c - v_1}}$$

$$\lambda_2 = \lambda \sqrt{\frac{c - v_2}{c + v_2}}$$



V $(0,0)$ se dvojčka poslovita, eden ostane doma, drugi se odpravi z vesoljsko ladjo na potovanje. Obišče kraj, ki je oddlajen 1.5 prostorskih enot od doma. Ko doma preteče 6 časovnih enot, se vrne domov. Koliko časa je medtem preteklo dvojčku, ki je odšel na potovanje.

$$\tau = \sum_{i=1}^{4} \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 - (x_i - x_{i-1})^2} = 5.1303$$

Magnetno polje je le relativistični popravek električnega polja. Naredimo misleni poizkus.

Dva dolga električno nabita vodnika se gibljeta s hitrostjo v vzdolž svoje osi. Dva opazovalca, eden, ki miruje in drugi, ki se giblje skupaj z vodnikoma, bosta izmerila enako odbojno silo med njima.

Opazovalec, ki potuje, bo zaznal električno odbojno silo, ki jo bo izračunal po Coulombovem zakonu

$$F = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\varrho^2}{d},$$

kjer je ϱ dolžinska gostota naboja, $\varrho = dq/dl$.

Mirujoči opazovalec

Opazovalec, ki miruje, pa bo poleg električne zaznal tudi magnetno privlačno silo med vodnikoma. Gibajoči se naboj povzroči magnetno polje. Silo med vodnikoma bo videl kot prispevek električnega Coulombovega in magnetnega Ampèrovega:

$$F = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\varrho'^2}{d} + \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\varrho'^2 v^2}{d},$$

kjer je ϱ' dolžinska gostota naboja, kot jo vidi mirujoči opazovalec.

Zaključek

Upoštevamo, da je $c^2 = 1/(\mu_0 \epsilon_0)$ in dobimo:

$$F = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\varrho'^2 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}{d}, \quad \varrho = \varrho' \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Od tod sledi:

$$\varrho = \frac{dq}{dl} \text{ in } \varrho' = \frac{dq}{dl'} \rightarrow dl' = dl \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$