13. Ravninski val

Lastnosti elektromagnetnega valovanja v praznem prostoru na velikih razdaljah $r \gg d$ od izmer antene so bile v grobem že opisane v poglavjih o sevanju in antenah. Na velikih razdaljah krogelne valovne fronte preidejo v vzporedne ravnine. Takšno valovanje imenujemo ravninski val (angleško: plane wave) oziroma žarek valovanja.

Ravninski val opisujejo valovne enačbe v prostoru brez izvorov, torej brez tokov $\vec{J}(\vec{r})=0$ in brez elektrin $\rho(\vec{r})=0$. V prostoru brez izvorov se lahko izognemo potencialom in neposredno rešujemo valovni enačbi za električno polje oziroma magnetno polje:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r})+\omega^2 \mu \epsilon \vec{E}(\vec{r})=0$$

$$\Delta \vec{H}(\vec{r})+\omega^2 \mu \epsilon \vec{H}(\vec{r})=0$$

Pri tem običajno zapišemo konstanto $\omega^2 \mu \epsilon = k^2$ z valovnim številom. Vektorski Laplace se da preprosto zapisati v kartezičnem koordinatnem sistemu (x, y, z) s skalarnimi Laplace pripadajočih komponent:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r})=\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{E}(\vec{r})\right)-\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r})\right)$$

$$\Delta \vec{E}(x, y, z)=\vec{1}_x \Delta E_x+\vec{1}_y \Delta E_y+\vec{1}_z \Delta E_z$$

$$\Delta E_x=\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

Vektorsko valovno enačbo za električno polje lahko tedaj zapišemo kot tri skalarne valovne enačbe za tri komponente vektorja električnega polja $\vec{E}(\vec{r})$:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}+k^2 E_x=0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}+k^2 E_y=0$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}+k^2 E_z=0$$

Rešitev skalarne valovne enačbe iščemo v obliki produkta treh funkcij, kjer je vsaka funkcija ene same koordinate:

$$E_x(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\Delta E_x=YZ\frac{d^2 X}{d x^2}+XZ\frac{d^2 Y}{d y^2}+XY\frac{d^2 Z}{d z^2}$$

Skalarno valovno enačbo za komponento E_x lahko zapišemo v obliki, da je prvi člen samo funkcija koordinate x, drugi člen samo funkcija koordinate y, tretji člen samo funkcija koordinate z in zadnji člen od koordinat ni odvisen:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{d x^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2 Y(y)}{d y^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2 Z(z)}{d z^2}+k^2=0$$

Ker so koordinate (x,y,z) med sabo neodvisne, sklepamo, da je vsak člen zase konstanta:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{d x^2}=-k_x^2 \qquad \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2 Y(y)}{d y^2}=-k_y^2 \qquad \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2 Z(z)}{d z^2}=-k_z^2$$

Posamezne konstante med sabo povezuje enačba:

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2$$

Matematiki zapišejo rešitve gornjih enačb na različne načine. Pri tem ima vsaka rešitev fizikalni pomen, saj opisuje določen fizikalni pojav. V primeru $k_z^2>0$ lahko zapišemo rešitev za $Z(z)$ v naslednjih oblikah:

$$Z(z)=C_1\cos(k_z z)+C_2\sin(k_z z)=C_3 e^{+jk_z z}+C_4 e^{-jk_z z}$$

Trigonometrijski funkciji pri tem opisujeta fizikalni pojav stojnega vala. Eksponentni funkciji imaginarnega argumenta opisujeta dva potujoča ravninska valova. Skladno s poimenovanjem valov na eno-dimenzijskih prenosnih vodih imenujemo člen z $e^{+jk_z z}$ odbiti val, člen z $e^{-jk_z z}$ pa napredujoči val.

Obe predstavljeni rešitvi sta enakovredni. Ravninski potujoči val je osnovni gradnik. Iz dveh ravninskih potujočih valov lahko sestavimo stojni val. Seveda gre tudi obratno, moramo le preračunati kompleksni konstanti (kazalca) C_1 in C_2 v pripadajoči kompleksni konstanti (kazalca) C_3 in C_4 ali obratno.

V primeru $k_z^2 < 0$ je $k_z = j|k_z|$ povsem imaginarna konstanta. Rešitev za $Z(z)$ lahko tedaj zapišemo v naslednjih oblikah:

$$Z(z) = C_5 \operatorname{ch}(|k_z| z) + C_6 \operatorname{sh}(|k_z| z) = C_7 e^{+|k_z| z} + C_8 e^{-|k_z| z}$$

Takšna rešitev za $Z(z)$ ne predstavlja več spreminjanja faze potujočega valovanja, pač pa eksponentno naraščanje $e^{+|k_z| z}$ oziroma usihanje $e^{-|k_z| z}$ amplitude. Eksponentno naraščanje oziroma usihanje opisuje različne fizikalne pojave, na primer elektromagnetno polje v redkejši snovi, ko pride na meji z gostejšo snovjo v slednji do popolnega odboja valovanja.

Osnovni gradnik rešitev valovne enačbe v prostoru brez izvorov je potujoči (napredujoči) ravninski val. Iz dveh ali več potujočih valov lahko sestavimo stojni val. Z uporabo kompleksnih konstant pridemo tudi do eksponentnega naraščanja oziroma usihanja.

Električno polje potujočega ravninskega vala ima v splošnem tri komponente E_x , E_y in E_z . Vsaka od komponent vsebuje tri funkcije pripadajočih treh koordinat. Skupno rešitev lahko zapišemo v obliki:

$$E_x(x, y, z) = E_{x0} e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{-jk_z z}$$

$$E_y(x, y, z) = E_{y0} e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{-jk_z z}$$

$$E_z(x, y, z) = E_{z0} e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{-jk_z z}$$

Če naj vse tri komponente električnega polja pripadajo istemu žarku, potem je smiselno, da izberemo iste k_x , k_y in k_z za vse tri komponente polja. Zapis rešitve si poenostavimo z uvedbo valovnega vektorja $\vec{k}$ za potujoči val:

$$\vec{k}=\vec{1}_x k_x+\vec{1}_y k_y+\vec{1}_z k_z=\vec{1}_k \omega\sqrt{\mu\epsilon}=\vec{1}_k k$$

$$\vec{E}(x,y,z)=\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Valovni vektor $\vec{k}$ kaže v smeri potovanja ravninskega vala, po velikosti pa je enak valovnemu številu k . Valovni vektor $\vec{k}$ je torej povsem smiselna nadgradnja pojma valovnega števila k v treh dimenzijah. Faza valovanja se spreminja najhitreje v smeri potovanja vala. Prečno na smer potovanja se faza prav nič ne spreminja, kar natančno opisuje skalarni produkt $\vec{k}\cdot\vec{r}$ v imaginarnem argumentu eksponentne funkcije. Vse konstante združimo v vektorsko konstanto $\vec{E}_0$, ki ustreza polju v koordinatnem izhodišču.

Maxwellove enačbe vsebujejo dve vektorski enačbi (Ampère in Faraday) ter eno skalarno enačbo (Gauss), skupaj torej sedem skalarnih enačb. Valovna enačba za električno polje $\vec{E}(\vec{r})$ je ena sama vektorska enačba, torej tri skalarne enačbe. Če tri skalarne Maxwellove enačbe uporabimo zato, da izločimo vektor magnetne poljske jakosti $\vec{H}(\vec{r})$, ostanejo še vedno štiri neodvisne skalarne enačbe, kar je ena enačba več od valovne enačbe za $\vec{E}(\vec{r})$!

Maxwellove enačbe torej vsebujejo strožje zahteve od valovne enačbe. Dobljeno rešitev za $\vec{E}(\vec{r})$ iz valovne enačbe moramo torej vedno preveriti z Maxwellovimi enačbami, da izločimo nefizikalne rešitve. Bolj točno, preveriti moramo odsotnost elektrin $\rho(\vec{r})=0$ z Gaussovim zakonom. Na srečo se operator odvajanja, simbolični vektor »Nabla« za ravninski potujoči val v kartezičnih koordinatah (x,y,z) poenostavi v:

$$\vec{\nabla}=-j\vec{k}$$

$$\mathrm{div}(\epsilon\vec{E})=\epsilon\left[\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right]=-j\epsilon(k_x E_x+k_y E_y+k_z E_z)=-j\epsilon\vec{k}\cdot\vec{E}=0$$

Gaussov zakon preprosto zahteva, da je električno polje $\vec{E}(\vec{r})\perp\vec{k}$

vedno pravokotno na valovni vektor, to je smer potovanja valovanja. Električno polje ravninskega vala torej ne sme imeti vzdolžne komponente. Pripadajočo magnetno poljsko jakost $\vec{H}(\vec{r})$ dobimo preko Faradayevega zakona z izračunom vrtinčenja:

$$\vec{H}(\vec{r})=\frac{j}{\omega\mu}\operatorname{rot}\vec{E}=\frac{j}{\omega\mu}\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}=\frac{j}{\omega\mu}(-j\vec{k}\times\vec{E})=\frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega\mu}=\frac{\vec{1}_k\times\vec{E}}{Z}$$

Magnetno polje potujočega ravninskega vala je pravokotno $\vec{H}(\vec{r})\perp\vec{k}$ na valovni vektor kot rezultat vektorskega produkta. Električna in magnetna poljska jakost sta pravokotni med sabo $\vec{E}(\vec{r})\perp\vec{H}(\vec{r})$ in sta v točnem razmerju $|\vec{E}|=Z|\vec{H}|$ valovne impedance $Z=\sqrt{\mu/\epsilon}$. Magnetno polje potujočega ravninskega vala je sofazno z električnim poljem, kar daje povsem delovno moč, torej povsem realni Poyntingov vektor v smeri valovnega vektorja:

$$\vec{S}(\vec{r})=\frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^*=\frac{1}{2}\vec{E}\times\left(\frac{\vec{1}_k\times\vec{E}^*}{Z}\right)=\vec{1}_k\frac{|\vec{E}|^2}{2Z}=\vec{1}_k\frac{|\vec{H}|^2 Z}{2}$$

Ravninski val v povsem praznem prostoru (μ_0,ϵ_0) je eden osnovnih fizikalnih pojavov, na katerega so vezane tudi merske enote sistema MKSA (Meter-Kilogram-Sekunda-Ampère). Meter je definiran z izbiro hitrosti žarka svetlobe oziroma elektromagnetnega ravninskega vala v povsem praznem prostoru (μ_0,ϵ_0) :

$$c_0=\frac{\omega}{k_0}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}=299792458\,\mathrm{m/s}\approx 3\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

Sekunda je definirana z izbiro frekvence cezijeve (133) atomske ure $f=9192631770\,\mathrm{Hz}$ v področju mikrovalov. Kilogram je od vseh osnovnih merskih enot najslabše definiran, ker je vezan na skrbno izbrano utež z relativno ponovljivostjo meritev v velikostnem razredu 10^{-8} . Žal meroslovci vse do danes (2015) niso našli boljše definicije za mersko enoto mase. Definicija kilograma kot masa kubičnega decimetra vode pri ledišču je še dosti bolj nenatančna.

Električna merska enota Ampère je žal vezana na vse tri predhodne merske enote: meter, (nerodno definirani) kilogram in sekundo, z izbiro permeabilnosti praznega prostora:

$$\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$$

Iz izbranih hitrosti svetlobe v praznem prostoru in permeabilnosti praznega prostora preprosto izračunamo dielektričnost praznega prostora:

$$\epsilon_0=\frac{1}{c_0^2\mu_0}\approx 8.8541878176\cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}\approx\frac{1}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$$

Izbrani hitrost svetlobe v praznem prostoru in permeabilnost praznega prostora določata tudi valovno impedanco praznega prostora:

$$Z_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}=c_0\mu_0\approx 376.730313\,\Omega\approx 377\,\Omega\approx 120\pi\,\Omega$$

Brezizgubna snov lahko ima permeabilnost μ oziroma dielektričnost ϵ različni od praznega prostora (μ_0,ϵ_0) :

$$\mu=\mu_0\mu_r \quad \text{in} \quad \epsilon=\epsilon_0\epsilon_r$$

Brezizgubno snov največkrat opisujeta relativna permeabilnost $\mu_r\geq 1$ in relativna dielektričnost $\epsilon_r\geq 1$. Hitrost ravninskega elektromagnetnega vala v takšni snovi znaša:

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r\epsilon_0\epsilon_r}}=\frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}}=\frac{c_0}{n}\leq c_0$$

Hitrost ravninskega vala se v snovi zmanjša za faktor $n=\sqrt{\mu_r\epsilon_r}\geq 1$, ki ga imenujemo lomni količnik snovi. Z lomnim količnikom izrazimo tudi valovno število v snovi in valovno dolžino v snovi:

$$k=nk_0=n\frac{\omega}{c_0}=\frac{\omega}{v}\geq k_0 \quad \text{in} \quad \lambda=\frac{\lambda_0}{n}=\frac{v}{f}=\frac{c_0}{nf}\leq\lambda_0$$

Brezizgubna snov ima tudi drugačno valovno impedanco Z od praznega prostora, ki je na splošno ne moremo izraziti z lomnim količnikom n iste snovi:

$$Z=\sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\epsilon_0\epsilon_r}}=Z_0\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$$

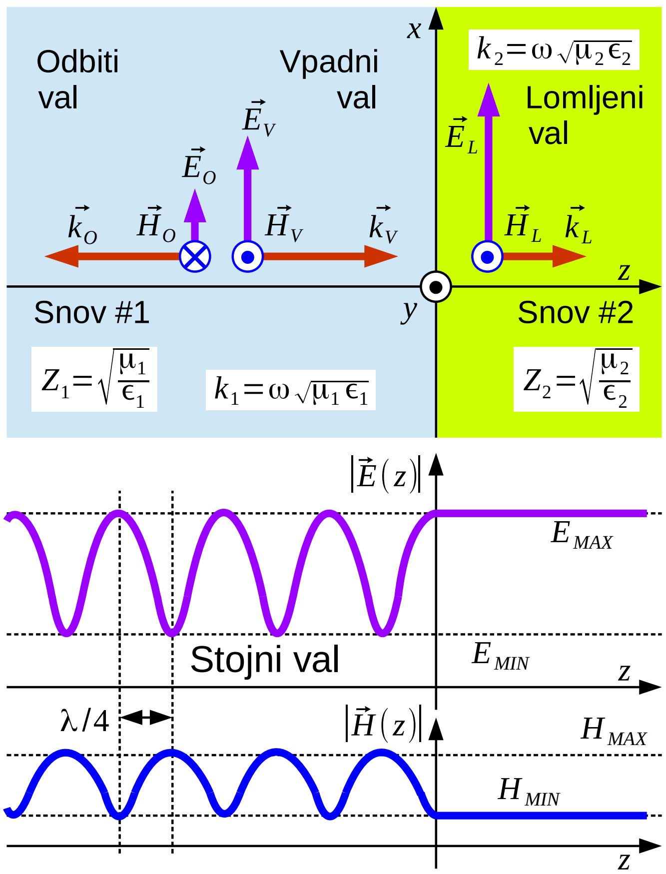
Lomni količnik n in valovna impedanca Z sta dve med sabo neodvisni veličini, ki popolnoma opisujeta elektromagnetne lastnosti brezizgubne snovi na povsem enakovreden način kot relativna permeabilnost μ_r in relativna dielektričnost ϵ_r .

Pogosto imamo opraviti snovmi, ki niso feromagnetiki $\mu_r=1$ in imajo le relativno dielektričnost $\epsilon_r\neq 1$ različno od praznega prostora. Izraza za lomni količnik in valovno impedanco se tedaj poenostavita v:

$$n=\sqrt{\epsilon_r} \quad \text{in} \quad Z=\frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}}=\frac{Z_0}{n}$$

Ravninski val nam kot gradnik omogoča rešiti marsikatero nalogo. Kaj se zgodi, ko žarek vpada iz prve brezizgubne snovi (μ_1,ϵ_1) pod pravim kotom na drugo brezizigubno snov (μ_2,ϵ_2) ? Nalogo rešijo trije ravninski valovi: vpadni val in odbiti val v prvi snovi ter lomljeni val v drugi snovi:

Odboj na meji snovi



Vpad $\vec{k}_V=\vec{1}_z k_1$

$\vec{E}_V(z)=\vec{1}_x E_V e^{-jk_1 z}$

$\vec{H}_V(z)=\vec{1}_y \frac{E_V}{Z_1} e^{-jk_1 z}$

Lom $\vec{k}_L=\vec{1}_z k_2$

$\vec{E}_L(z)=\vec{1}_x E_L e^{-jk_2 z}$

$\vec{H}_L(z)=\vec{1}_y \frac{E_L}{Z_2} e^{-jk_2 z}$

Odboj $\vec{k}_O=-\vec{1}_z k_1$

$\vec{E}_O(z)=\vec{1}_x E_O e^{jk_1 z}$

$\vec{H}_O(z)=-\vec{1}_y \frac{E_O}{Z_1} e^{jk_1 z}$

Prestop $\vec{E}_t(z=0)$: $E_V+E_O=E_L$

Prestop $\vec{H}_t(z=0)$: $\frac{E_V}{Z_1}-\frac{E_O}{Z_1}=\frac{E_L}{Z_2}$

$$\frac{E_V-E_O}{Z_1}=\frac{E_V+E_O}{Z_2}$$

$$E_V(Z_2-Z_1)=E_O(Z_2+Z_1)$$

Odbojnost $\Gamma=\frac{E_O}{E_V}=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}$

Pri pravokotnem vpadu v smeri $\vec{1}_z$ na mejo snovi so tako električna polja kot magnetna polja vseh treh ravninskih valov vzporedna z mejo snovi v ravnini xy . Ker na meji snovi ni virov polja, morajo biti tangencialne komponente električne poljske jakosti $\vec{E}_t$ in magnetne poljske jakosti $\vec{H}_t$ na obeh straneh meje pri $z=0$ enake.

Uveljavitev prestopnih pogojev pokaže na povezavo med vpadnim, odbitim in lomljenim valom, ki jo določata valovni impedanci obeh snovi $Z_1=\sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$ in $Z_2=\sqrt{\mu_2/\epsilon_2}$. V primeru ravninskih valov definiramo odbojnost $\Gamma=E_O/E_V$ kot razmerje kazalcev električne poljske jakosti odbitega in vpadnega vala. Opisani izraz za odbojnost je povsem skladen z izrazom, ki smo ga dobili za eno-dimenzijski vod z $Z_K=Z_1$,ki je priključen na breme $Z=Z_2$.

Odbojnost pogosto računamo na meji brezizgubnih snovi (dielektrikov), ki niso feromagnetiki $\mu_1=\mu_2=\mu_0$ oziroma $\mu_{r1}=\mu_{r2}=1$ in se med sabo razlikujejo le v dielektričnosti $\epsilon_1\neq\epsilon_2$. V tem primeru lahko odbojnost Γ računamo še na številne druge načine, iz relativnih dielektričnosti, iz lomnih količnikov oziroma iz valovnih števil v obeh snoveh:

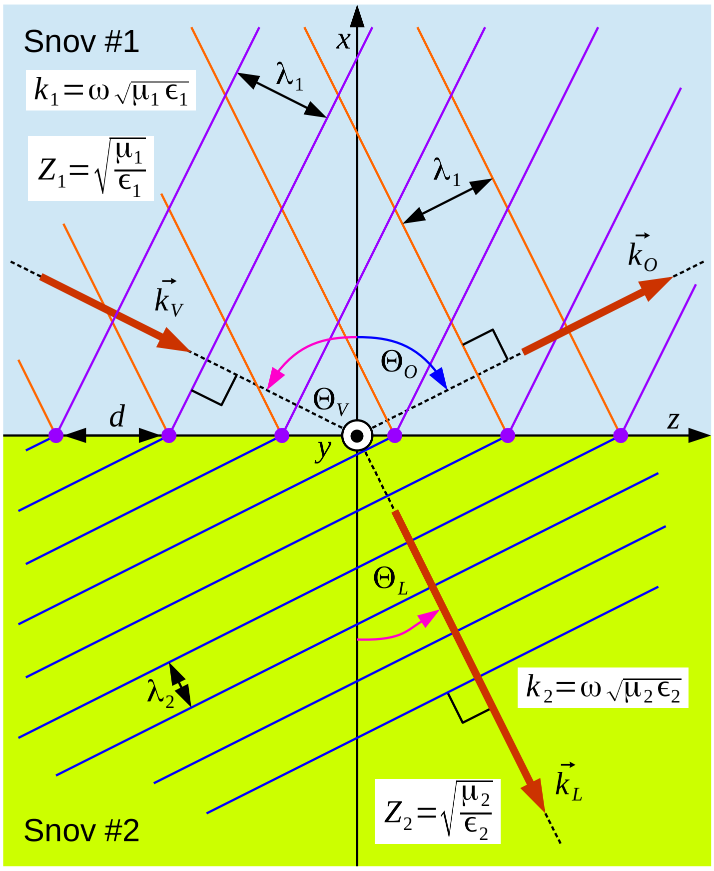
$$\Gamma=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}=\frac{\sqrt{\epsilon_1}-\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1}+\sqrt{\epsilon_2}}=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}$$

Odbiti val in vpadni val tvorita v prvi snovi stojni val. Maksimumi električne poljske jakosti stojnega vala sovpadajo z minimumi magnetne poljske jakosti in obratno. Faza odbojnosti se suče z dvakratno vrednostjo fazne konstante $\Gamma(z)=\Gamma(0)e^{2\beta z}=\Gamma(0)e^{2k_1 z}$, ki je v opisanem primeru kar enaka valovnemu številu v prvi snovi $\beta=k_1$, kjer je $z<0$ negativen!

Na sliki je narisan primer, ko valovanje vpada na mejo z višjo valovno impedanco $Z_2>Z_1$ (redkejša snov) in takrat je odbojnost na meji dveh brezizgubnih snovi pozitivno realno število $\Gamma(z=0)>0$. Ko valovanje vpada na snov z nižjo valovno impedanco $Z_2<Z_1$ (gostejša snov), je odbojnost negativna $\Gamma(z=0)<0$. Neskončno prevodno kovino opisuje $Z_2=0$, površina dobro prevodne kovine zato dosega odbojnost skoraj $\Gamma=-1$.

Valovanje v drugi snovi posplošeno imenujemo lomljeni žarek, čeprav pri pravokotnem vpadu sploh ne pride do loma valovanja. Pri pravokotnem vpadu sta pomembni edino valovni impedanci obeh snovi Z_1 in Z_2 , saj valovni vektorji vseh treh valov kažejo v isto oziroma nasprotno smer. Lomljeni žarek predstavlja napredujoči val v drugi snovi. Ker odbitega vala v drugi snovi ni, tam ni stojnega vala in je amplituda napredujočega vala konstantna.

Pomen valovnih vektorjev opazimo šele pri poševnem vpadu žarka na mejo dveh snovi, k so valovni vektorji vseh treh žarkov $\vec{k}_V$, $\vec{k}_O$ in $\vec{k}_L$ različni med sabo. Če naj bo fizikalni pojav enak vzdolž celotne osi z , ki razmejuje različni snovi, potem morajo biti pripadajoče komponente vseh treh valovnih vektorjev $k_{Vz}=k_{Oz}=k_{Lz}=\beta$ med sabo enake:



Lom na meji snovi

$$\vec{k}_V=\vec{1}_V k_1=\vec{1}_x k_{Vx}+\vec{1}_z\beta$$

$$\vec{k}_O=\vec{1}_O k_1=\vec{1}_x k_{Ox}+\vec{1}_z\beta$$

$$\vec{k}_L=\vec{1}_L k_2=\vec{1}_x k_{Lx}+\vec{1}_z\beta$$

$$k_1=n_1 k_0=k_0\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}$$

$$k_2=n_2 k_0=k_0\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}$$

$$\beta=k_1\sin\Theta_V=k_1\sin\Theta_O=k_2\sin\Theta_L$$

$$\lambda_1=\frac{\lambda_0}{n_1}=\frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}}\qquad \lambda_2=\frac{\lambda_0}{n_2}=\frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}}$$

$$d=\frac{\lambda_1}{\sin\Theta_V}=\frac{\lambda_1}{\sin\Theta_O}=\frac{\lambda_2}{\sin\Theta_L}$$

Odbojni zakon $\Theta_O=\Theta_V$

Snellov lomni zakon

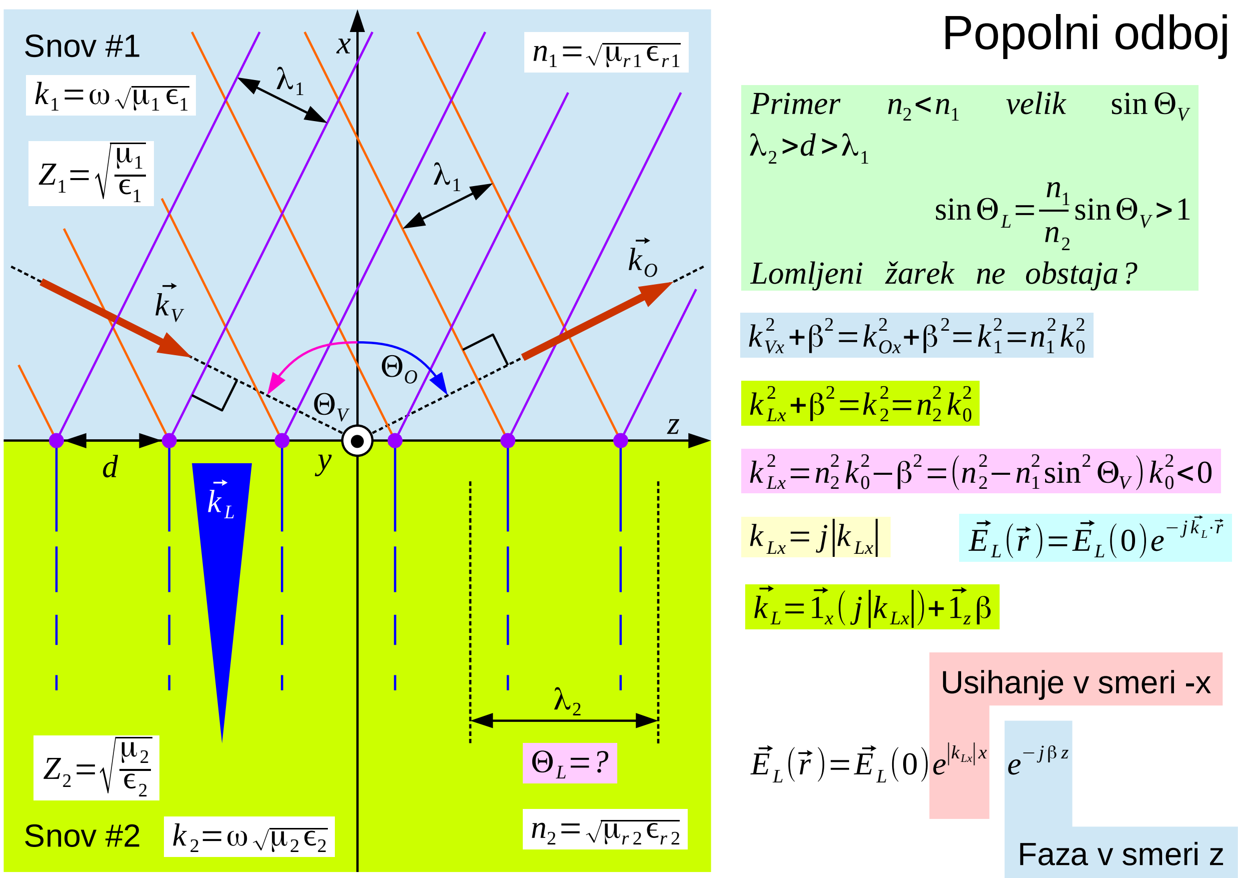
$$n_1\sin\Theta_V=n_2\sin\Theta_L$$

Razlaga s komponentami z valovnih vektorjev je povsem enakovredna razlagi z valovnimi frontami vseh treh žarkov. Valovne fronte so pravokotne na smer žarka. Vzdolž celotne mejne ploskve, torej vzdolž osi z morajo valovne fronte ohranjati isto medsebojno fazo. Na gornji sliki so iz preprostosti narisane sofazne! Projekcija valovne dolžine kateregakoli žarka mora biti enaka d !

Komponente z valovnih vektorjev oziroma projekcije valovnih dolžin žarkov privedejo do odbojnega zakona $\Theta_O=\Theta_V$ ter do Snellovega lomnega zakona $n_1\sin\Theta_V=n_2\sin\Theta_L$. Slednji je poimenovan po danskem astronomu, ki je zakonitosti loma svetlobe ponovno odkril več kot šest stoletij za arabskim znanstvenikom iz Bagdada: Ibn Sahl je povsem pravilen lomni zakon objavil že leta 984! Smer lomljenega žarka Θ_L torej določata lomna količnika n_1 in n_2 , valovni števili k_1 in k_2 oziroma valovni dolžini λ_1 in λ_2 .

Valovni impedanci Z_1 in Z_2 ne nastopata v smeri lomljenega žarka, pač pa povsem jasno tudi pri poševnem vpadu nastopata v izrazu za odbojnost Γ . Slednja je povrhu odvisna od polarizacije elektromagnetnega valovanja. Uveljavitev prestopnih pogojev na meji dveh snovi daje pri poševnem vpadu dve različni Fresnelovi odbojnosti za polarizacijo TE, ko velja $\vec{E}\perp\vec{1}_z$ in tej pravokotno polarizacijo TM, ko velja $\vec{H}\perp\vec{1}_z$. Fresnelove odbojnosti dobimo največkrat zapisane samo z lomnima količnikoma n_1 in n_2 brez valovnih impedanc, kar jasno velja samo za dielektrike, ki niso feromagnetiki $\mu_1=\mu_2=\mu_0$!

V primeru prestopa v redkejšo snov $n_2<n_1$ se pri dovolj položnem vpadu oziroma dovolj velikem $\sin\Theta_V$ lahko zgodi, da smeri lomljenega žarka $\Theta_L=?$ ne moremo določiti. Poskus pokaže, da se vpadni žarek tedaj popolnoma odbije:



Valovna dolžina v drugi snovi $\lambda_2>d$ je tedaj večja od zahtevane projekcije. Kaj dosti več s preprostim sklepanjem ne moremo ugotoviti. Lahko pa izračunamo valovni vektor $\vec{k}_L$ iskanega lomljenega žarka. Račun pokaže, da je komponenta k_{Lx} čisto imaginarna, valovni vektor $\vec{k}_L$ v redkejši snovi pa kompleksen.

Kljub popolnemu odboju elektromagnetno polje sega tudi v redkejšo snov. Faza valovanja v redkejši snovi se spreminja samo v smeri osi z, zato so valovne fronte pravokotne na mejo snovi. Jakost elektromagnetnega polja eksponentno usiha z oddaljevanjem od meje snovi v smeri $-x$, pripadajoča komponenta S_x Poyntingovega vektorja je povsem jalova.

Eksponentno usihanje valovanja v redkejši snovi opišemo z vdorno globino δ, to se pravi razdaljo, na kateri elektromagnetno polje upade za faktor $1/e$. Vdorna globina δ je običajno podobnega velikostnega razreda kot valovna dolžina λ_0 v praznem prostoru:

$$\delta=\frac{1}{|l_{Lx}|}=\frac{1}{\sqrt{\beta^2-n_2^2k_0^2}}=\frac{1}{k_0\sqrt{n_1^2\sin^2\Theta_V-n_2^2}}=\frac{\lambda_0}{2\pi\sqrt{n_1^2\sin^2\Theta_V-n_2^2}}$$

Pojem popolnega odboja je zavajajoč, ker zahteva neskončno debelo $h\rightarrow\infty$ redkejšo snov n_2, da elektromagnetno polje v njej popolnoma usahne. Če je redkejša snov n_2 le končne debeline $h\approx\delta$ in ji ponovno sledi gostejša snov n_3, pride na novi meji snovi do ponovnega odboja in loma. Pojav imenujemo tuneliranje valovanja skozi redkejšo snov.

Elektromagnetno nalogo tuneliranja opisuje pet ravninskih valov, ki jih ponazarja pet valovnih vektorjev. Valovanje v izvorni gostejši snovi n_1 opisujeta vpadni žarek $\vec{k}_V$ in odbiti žarek $\vec{k}_O$. Valovanje v plasti redkejše snovi n_2 končne debeline $h\approx\delta$ se pojavita dva eksponentno usihajoča valova v nasprotnih smereh $\vec{k}_{T+}$ in $\vec{k}_{T-}$. Končno se v gostejši snovi n_3 pojavi še lomljeni žarek $\vec{k}_L$:

Vpad

$k_{Vx} = -k_{1x} = -\sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}$

Odboj

$k_{Ox} = +k_{1x} = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}$

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \vec{E}_V(0) e^{+jk_{1x}x} e^{-j\beta z} + \\ + \vec{E}_O(0) e^{-jk_{1x}x} e^{-j\beta z}$$

$n_2 < n_1 < n_3$

$\lambda_2 > d > \lambda_1 > \lambda_3$

$\sin\Theta_T > 1$

Tuneliranje

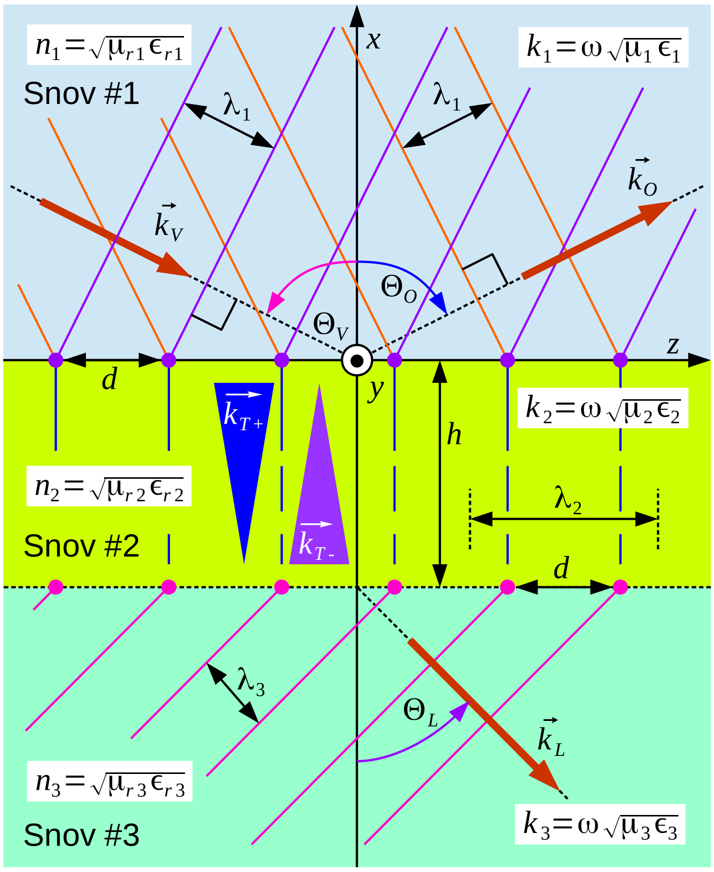
$\pm|k_{Tx}| = \pm\sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}$

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \vec{E}_{T+}(0) e^{+|k_{Tx}|x} e^{-j\beta z} + \\ + \vec{E}_{T-}(0) e^{-|k_{Tx}|x} e^{-j\beta z}$$

Lom

$k_{Lx} = -k_{3x} = -\sqrt{n_3^2 k_0^2 - \beta^2}$

$$\vec{E}_3(\vec{r}) = \vec{E}_L(0) e^{+jk_{3x}x} e^{-j\beta z}$$



Tuneliranje

Pojav na meji snovi n_1/n_2 proži eksponentno usihajoč val $\vec{E}_{T+}$ v smeri $-x$ v redkejši snovi n_2. Pojav na meji snovi n_2/n_3 proži eksponentno usihajoč val $\vec{E}_{T-}$ v smeri $+x$ v redkejši snovi n_2. Kazalca obeh eksponentno usihajočih valov sta med sabo premaknjena za četrt periode.

Zaradi kvadrature oba eksponentno usihajoča valova dajeta skupaj dodatno realno komponento S_{2x} Poyntingovega vektorja, ki ponazarja prenos delovne moči skozi plast redkejše snovi n_2. V spodnji gostejši snovi n_3 se tuneliranje pretvori v lomljeni žarek, to je potujoči ravninski val s povsem delovnim Poyntingovim vektorjem. Jakost tuneliranja upada eksponentno z debelino h sloja redkejše snovi n_2 in lahko postane v praksi zanemarljivo majhna.

* * * * *