2. Telegrafska enačba

Električni telegraf je plod dela številnih izumiteljev v prvi polovici 19. stoletja. Uporabnost telegrafa je neposredno vezana na njegov domet. V drugi polovici 19. stoletja so inženirji dosegli prekooceanske razdalje. Prvi prekooceanski kabel iz Evrope v Ameriko je bil položen že leta 1857. Žal je zaradi tehnološke nedovršenosti izolacije deloval le nekaj tednov. Tehnologija izolacije pa ni edina težava pri prekooceanskih razdaljah.

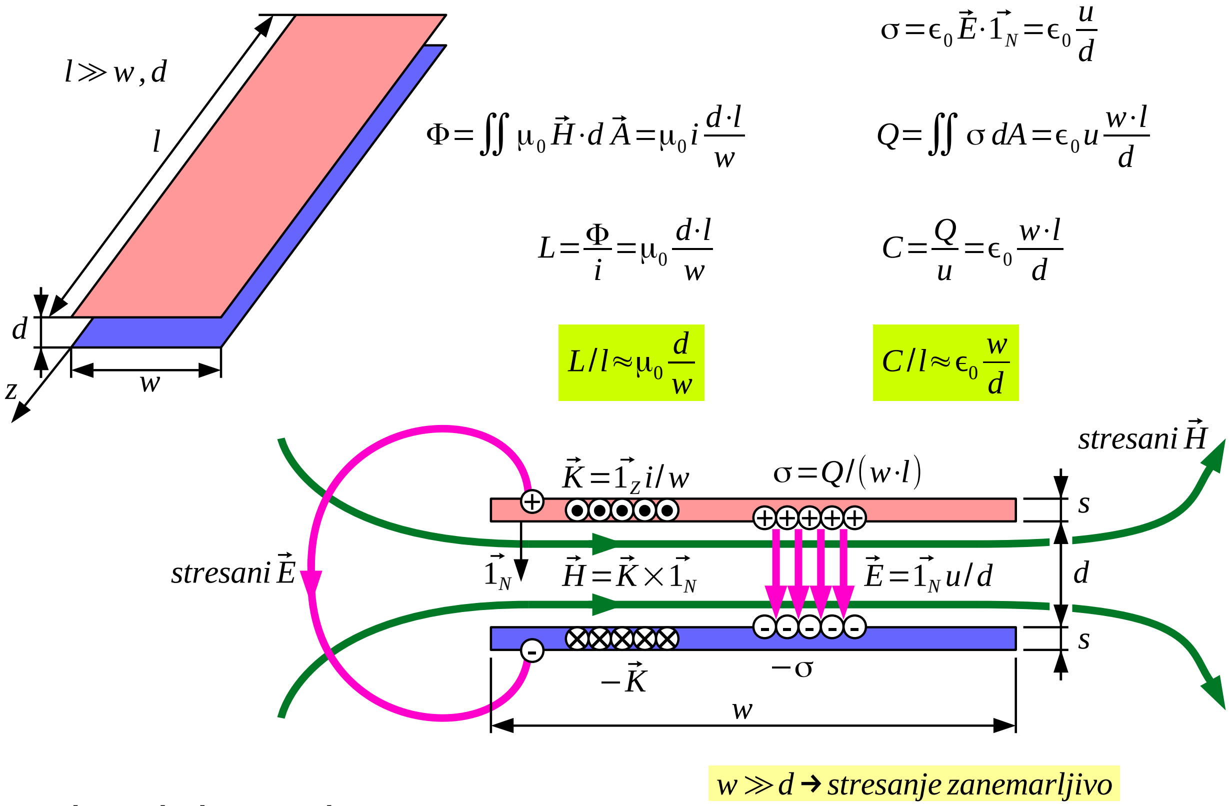
Na tako velikih razdaljah opazimo pojave elektrodinamike že pri zelo nizkih prenosnih hitrostih Morsejeve telegrafije z ročno oddajo in sprejemom na sluh, torej pri pasovni širini komaj 10Hz. Upornost žice ni edini niti najpomembnejši podatek telegrafskega kabla. Nadomestno vezje prenosne poti ni preprosto in takratni inženirji so prvo, eno-dimenzijsko nalogo elektrodinamike opisali z imenom telegrafska enačba.

Prenosni vodi ostajajo zelo pomembno področje elektrodinamike tudi danes. Dogovor velja, da v eno-dimenzijskih nalogah opisuje veliko izmero, kjer opazimo pojave elektrodinamike, koordinata z oziroma dolžina voda l. Prečne izmere prenosnih vodov so v številnih praktičnih primerih zadosti majhne, da jih lahko obravnavamo z gradniki električnih vezij.

Dva preprosta, silno uporabna in vsakdanja zgleda iz osnov elektrotehnike sta trakasti dvovod in koaksialni kabel. Preprosta zgleda sta izbrana z namenom, da se tu ne ukvarjamo s kompliciranim izračunom elektromagnetnega polja, kapacitivnosti in induktivnosti, pač pa že znani rezultat iz osnov elektrotehnike uporabimo v elektrodinamiki. Simetrični žični dvovod (parica) je prav tako uporaben vsakdanji zgled, le da so točni izrazi za kapacitivnost in induktivnost že malo bolj zahtevni.

Trakasti dvovod sestavljata dva kovinska vodnika v obliki trakov širine w, debeline s in dolžine l. Trakova sta razmaknjena za d v praznem prostoru. Trakova tvorita kondenzator s ploščama površine $w\times l$ na medsebojni razdalji d. Ista dva trakova tvorita tuljavo z enim samim ovojem s presekom jedra $d\times l$ in dolžino tuljave w.

Ko velja $w\gg d$, je večina električnega in magnetnega polja v reži med trakovoma. Debelina trakov s postane nepomembna. Stresano električno in magnetno polje drugod po prostoru lahko zanemarimo oziroma opišemo z malenkostnim povečanjem w, to se pravi, s popravkom širine trakov. Izraza za kapacitivnost in induktivnost trakastega dvovoda se tedaj silno poenostavita:

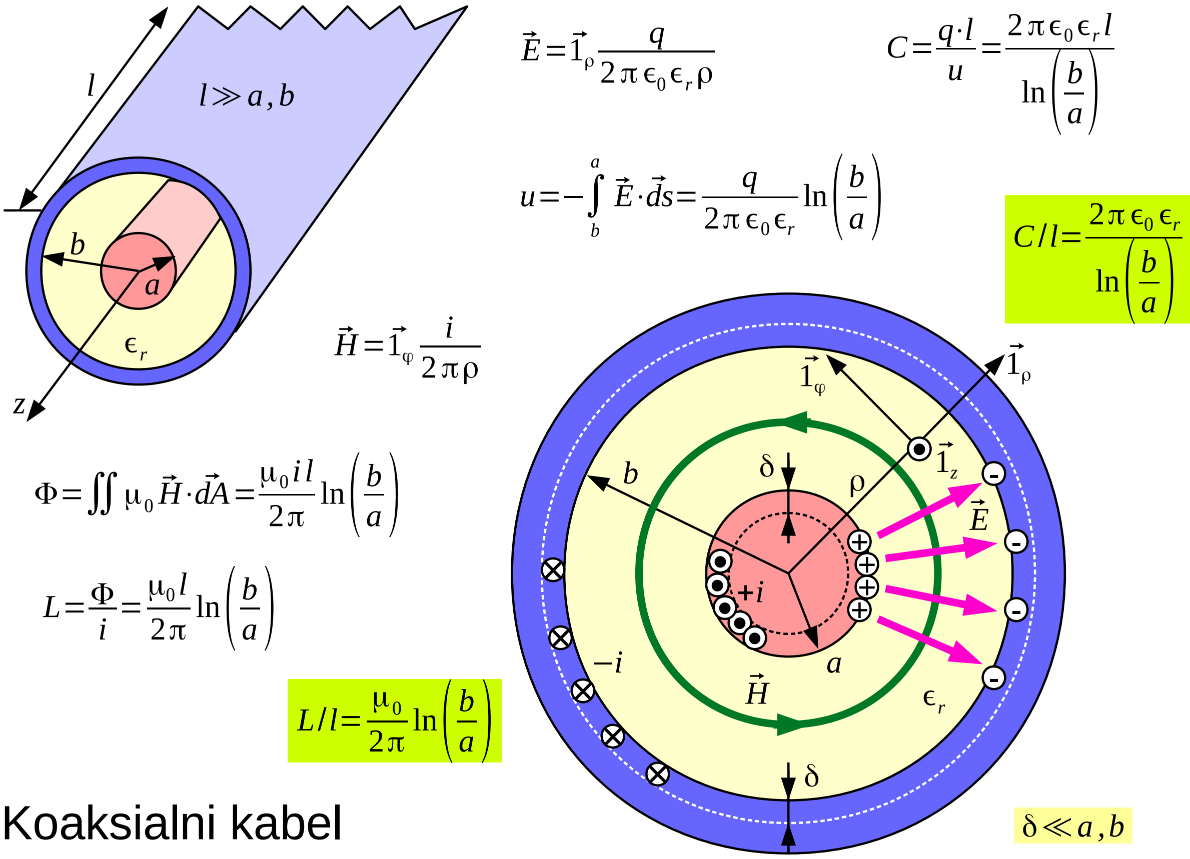


Trakasti dvovod

Poleg telegrafske enačbe je Oliver Heaviside izumil tudi koaksilani kabel. Koaksialni kabel sestavljajo kovinska žila s polmerom a, izolacijo z relativno dielektričnostjo ϵ_r in kovinski oklop z notranjim polmerom b. Kapacitivnost koaksialnega kabla izračunamo s pomočjo električnega polja preme elektrine. Slednje upada kot $1/\rho$, integracija električnega polja daje logaritem razmerja polmerov, ki nastopa v imenovalcu kapacitivnosti.

Enosmerni tok je razporejen po celotnem preseku vodnikov. Enosmerno magnetno polje koaksialnega kabla se pojavi v notranjosti obeh vodnikov in v dielektriku med njima. Zunaj koaksialnega kabla ni nobenega polja, niti električnega niti magnetnega, če se tok v žili v celoti vrača nazaj po oklopu.

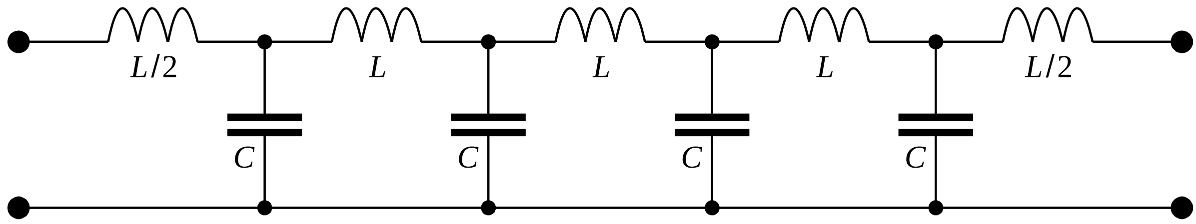
V telekomunikacijah uporabljamo koaksialni kabel na tako visokih frekvencah, da je tok razporejen samo po tanki koži debeline komaj nekaj mikrometrov $\delta \ll a, b$ po površinah vodnikov: po površini žile in po notranji površini oklopa. Magnetno polje v notranjosti vodnikov je tedaj zanemarljivo. Magnetno polje v dielektriku upada kot $1/\rho$, integracija daje logaritem razmerja polmerov, ki nastopa v izrazu za induktivnost:



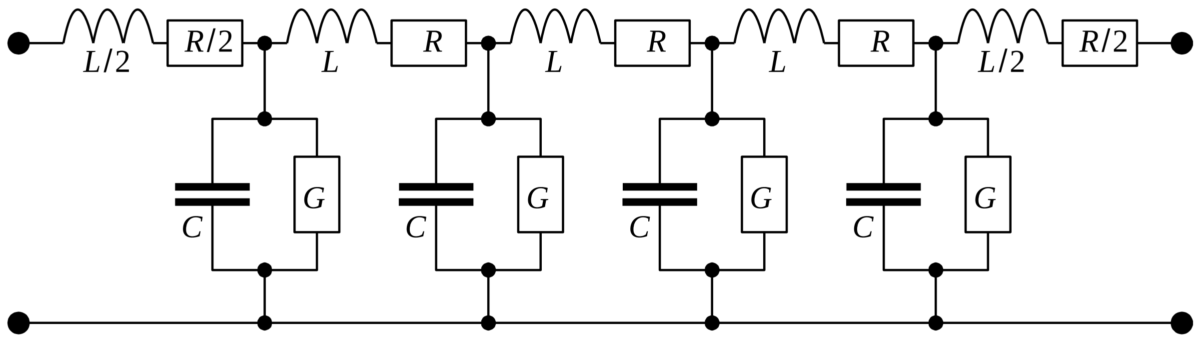
Koaksialni kabel

Induktivnost in kapacitivnost prenosnega voda sta porazdeljeni veličini po dolžini voda l. Električno nadomestno vezje mora torej vsebovati večje število zaporednih tuljav L in pripadajoče število vzporednih kondenzatorjev C. Za čimbolj natančen opis razdelimo eno od zaporednih tuljav na polovico, da nastopa $L/2$ na začetku in na koncu verige.

Natančnejši opis prenosnega voda vsebuje tudi izgube v kovinskih vodnikih in v dielektriku med njima. Izgube v kovinskih vodnikih se kažejo kot upor upornosti R, ki je vezan zaporedno tuljavi induktivnosti L. Izgube v dielektriku ponazorimo na preprost način z uporom prevodnosti G, ki je vezan vzporedno h kondenzatorju kapacitivnosti C. Nadomestni vezji poenostavljenega voda brez izgub in natančnejši opis voda z izgubami sta prikazana na spodnji sliki:



Nadomestno vezje brezizgubnega voda

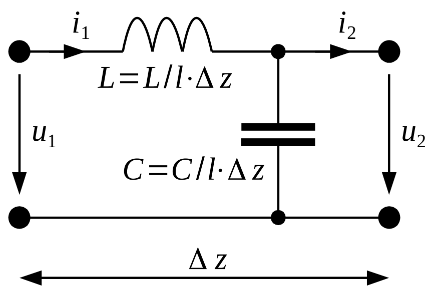


Nadomestno vezje voda z izgubami

Vsak elektrotehnik bo v takšnih vezjih prepoznal nizkoprepustno frekvenčno sito. Tu je z nadomestnim vezjem nekaj narobe, ker se resnični prenosni vodi nikakor ne obnašajo kot nizkoprepustna sita! Zaporna frekvenca navideznega sita sicer narašča z natančnostjo opisa, torej z višanjem števila nadomestnih tuljav in kondenzatorjev.

Računska zahtevnost reševanja električnega vezja je sorazmerna kubu (tretji potenci) števila vozlišč oziroma zank vezja, torej natančnejši opis z večjim številom tuljav in kondenzatorjev praktično ni uporaben. Za rešitev naloge je potreben pristop, ki ga opisuje telegrafska enačba:

Telegrafska enačba za brezizgubni vod



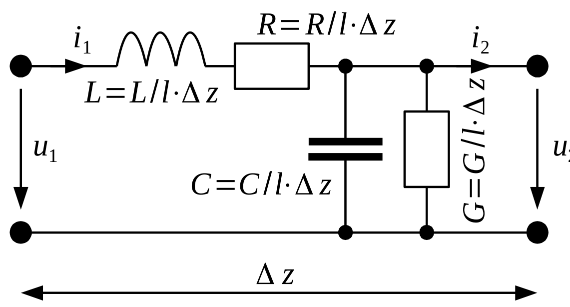
$$\Delta u = u_2 - u_1 = -L \cdot \frac{di_1}{dt}$$

$$\Delta i = i_2 - i_1 = -C \cdot \frac{du_2}{dt}$$

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = -L/l \cdot \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -C/l \cdot \frac{\partial u(z,t)}{\partial t}$$

Telegrafska enačba za vod z izgubami



$$\Delta u = u_2 - u_1 = -L \cdot \frac{di_1}{dt} - R \cdot i_1$$

$$\Delta i = i_2 - i_1 = -C \cdot \frac{du_2}{dt} - G \cdot u_2$$

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = -L/l \cdot \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} - R/l \cdot i(z,t)$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -C/l \cdot \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} - G/l \cdot u(z,t)$$

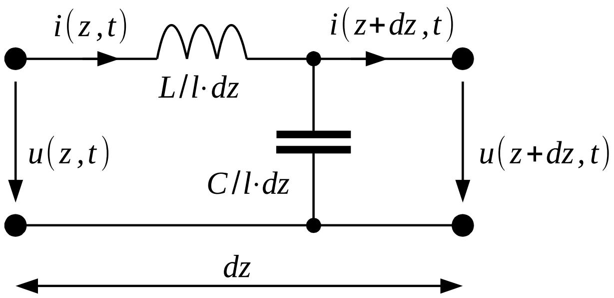
Napaka pri izračunu bo tem manjša, čim krajše odseke prenosnega voda Δz opisujemo s koncentriranimi gradniki: tuljavami in kondenzatorji. Če končno dolžino odseka Δz nadomestimo z diferencialno majhno dolžino odseka dz, opisujeta dogajanje v nadomestnem vezju dve sklopljeni parcialni diferencialni enačbi za napetost $u(z,t)$ in tok $i(z,t)$ s skupnim imenom telegrafska enačba.

V resničnem prenosnem vodu moramo upoštevati tudi izgube. Kovinski vodniki dodajajo od nič različno zaporedno upornost R. Nebrezhibna izolacija dodaja vzporedno prevodnost G. V resničnem vodu oba nista preprosti konstanti, pač pa sta komplicirani funkciji. Oba je lažje zapisati v frekvenčnem prostoru kot $R(\omega)$ in $G(\omega)$, zato se na opis dogajanja v vodu z izgubami vrnemo kasneje v frekvenčnem prostoru.

Prenosne vode sicer skušamo izdelati tako, da so izgube majhne. V tem primeru nam daje tudi telegrafska enačba za brezizgubni vod razmeroma dober vpogled v dogajanje na prenosnem vodu. Sklopljeni diferencialni enačbi poskusimo rešiti tako, da z dodatnim odvajanjem prve enačbe po položaju z oziroma druge enačbe po času t izločimo eno od neznank, na primer tok $i(z,t)$ in pri tem privzamemo, da matematično dovolj pohlevne funkcije dopuščajo zamenjavo vrstnega reda odvajanja:

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}=-L/l\cdot\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}\quad \Big/\ \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}=-C/l\cdot\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}\quad \Big/\ \frac{\partial}{\partial t}$$



$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}=-L/l\cdot\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z\,\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z\,\partial t}=-C/l\cdot\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}=L/l\cdot C/l\cdot\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}$$

Rešitev telegrafske enačbe

$$u(z,t)=\underbrace{u_N\left(t-\frac{z}{v}\right)}_{\text{Napredujoči val}}+\underbrace{u_O\left(t+\frac{z}{v}\right)}_{\text{Odbiti (povratni) val}}$$

$$u(z,t)=u\left(t\pm\frac{z}{v}\right)\qquad v=\frac{1}{\sqrt{L/l\cdot C/l}}$$

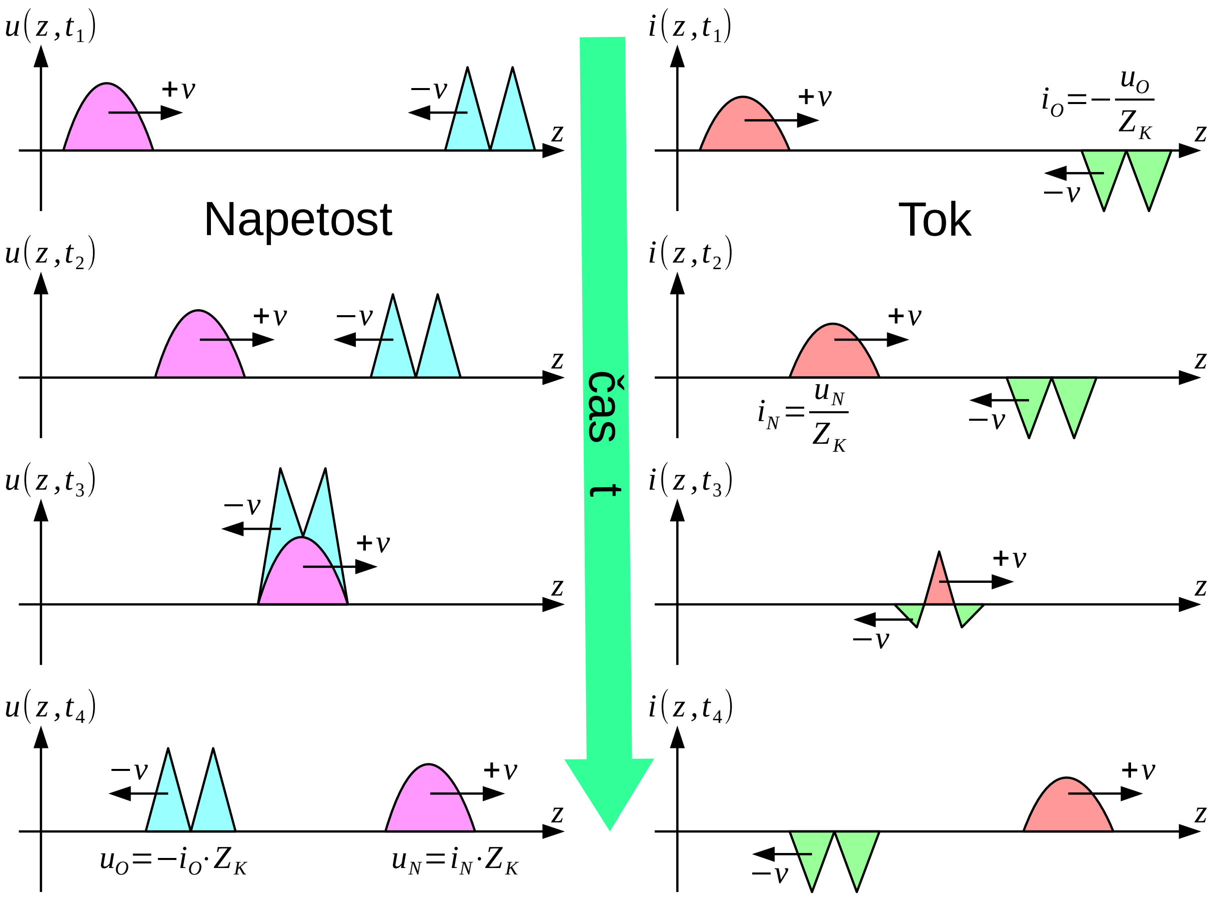
$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}=u''\left(t\pm\frac{z}{v}\right)\cdot\frac{1}{v^2}\qquad \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}=u''\left(t\pm\frac{z}{v}\right)$$

Ostane nam ena sama parcialna diferencialna enačba za napetost $u(z,t)$. V enačbi je razvidno, da se dvojna odvoda po položaju z oziroma po času t razlikujeta samo v množilni konstanti! Rešitev $u(z,t)$ je torej lahko poljubna funkcija enega samega argumenta $t\pm z/v$, primerno utežene vsote oziroma razlike časa t in položaja z .

Odvod funkcije enega argumenta označimo s črtico. Drugi odvod z dvema črticama. Po pravilu za odvajanje moramo rezultat pomnožiti še z odvodom argumenta $t\pm z/v$ po z oziroma t pripadajočega reda.

Povezavo med časom in položajem daje hitrost v , s katero se funkcija premika naprej oziroma nazaj po osi z . Rešitev z razliko imenujemo tudi napredujoči (vpadni) val in se z naraščajočim časom premika naprej po osi z , rešitev z vsoto pa odbiti (povratni) val in se premika nazaj po osi z .

Diferencialna enačba drugega reda zahteva dve popolnoma neodvisni rešitvi, napredujoči in odbiti val. Vsaka rešitev za napetost $u(z,t)$ ima pripadajočo rešitev za tok $i(z,t)$. Primer rešitve telegrafske enačbe je prikazan spodaj kot časovno zaporedje slikic. Zgleda za napredujoči in odbiti val napetosti $u(z,t)$ in toka $i(z,t)$ sta namenoma prostorsko omejena in prikazana v različnih barvah:



Povezava med tokom in napetostjo napredujočega ali odbitega vala je preprosta množilna konstanta in jo imenujemo karakteristična upornost voda R_K . Dobimo jo z izračunom odvodov v eni od izvornih sklopljenih enačb. Najprej izračunamo odvod funkcije enega argumenta $t \pm z/v$, nato odvajamo še argument $t \pm z/v$ po z oziroma t . Pomembna razlika med napredujočim in odbitim valom je v predznaku množilne konstante, ki povezuje rešitvi za napetost $u(z,t)$ in tok $i(z,t)$.

Pojem karakteristične upornosti R_K v časovnem prostoru razširimo na pojem karakteristične impedance Z_K v frekvenčnem prostoru. Karakteristična impedanca Z_K brezizgubnega voda je povsem realno število in ustreza karakteristični upornosti R_K v časovnem prostoru. Zato pogosto uporabljamo izraz karakteristična impedanca Z_K tudi v časovnem prostoru, čeprav strogo gledano impedanca v časovnem prostoru ne obstaja.

Rezultat računa je razmerje med odvodom funkcije napetosti u' po argumentu $t \pm z/v$ in odvodom funkcije toka i' po istem argumentu $t \pm z/v$. V elektrodinamiki nas enosmerne konstante ne zanimajo, torej velja isto razmerje tudi med napetostjo u in tokom i:

Karakteristična upornost

$$\frac{\partial}{\partial z} u\left(t \pm \frac{z}{v}\right) = -L/l \frac{\partial}{\partial t} i\left(t \pm \frac{z}{v}\right) \qquad \frac{u'}{i'} = \mp v \cdot L/l = \mp\sqrt{\frac{L/l}{C/l}} = \mp R_K = \frac{u}{i}$$

$$\pm\frac{1}{v} u'\left(t \pm \frac{z}{v}\right) = -L/l \cdot i'\left(t \pm \frac{z}{v}\right) \qquad R_K = \sqrt{\frac{L/l}{C/l}} = \frac{u_N}{i_N} = -\frac{u_O}{i_O} \qquad i(z,t) = \frac{u_N}{R_K}\left(t - \frac{z}{v}\right) - \frac{u_O}{R_K}\left(t + \frac{z}{v}\right)$$

Trakasti dvovod

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \frac{d}{w} \cdot \epsilon_0 \frac{w}{d}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \mathrm{m/s}$$

$$R_K = \sqrt{\frac{\mu_0 \frac{d}{w}}{\epsilon_0 \frac{w}{d}}} = \frac{d}{w}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx \frac{d}{w} \cdot 377\,\Omega$$

Koaksialni kabel

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

$$R_K = \sqrt{\frac{\frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \approx \frac{60\,\Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Pozor, razmerje med napetostjo in tokom napredujočega vala ima glede na naše oznake vrednost $+R_K$, razmerje med tokom in napetostjo odbitega vala pa vrednost $-R_K$. Napredujoči in odbiti val imata tudi vsak svojo, neodvisno moč in nosita vsak svojo, neodvisno energijo. V natančnem opisu v treh dimenzijah bi napredujoči in odbiti val na takšnih prenosnih vodih poimenovali kot dve neodvisni TEM (prečni elektro-magnetni) valovanji.

Valovanje na prenosnem vodu vsebuje električno in magnetno energijo $W = W_e + W_m$. Električno energijo na enoto dolžine določa napetost na vodu $W_e/l(z,t) = 1/2 \cdot C/l \cdot u^2(z,t)$. Magnetno energijo na enoto dolžine določa tok na vodu $W_m/l(z,t) = 1/2 \cdot L/l \cdot i^2(z,t)$.

Osamljen napredujoči val, na primer v trenutkih t_1 ali t_2 na časovnem zaporedju slikic, nosi povsem enako električno in magnetno energijo $W_e = W_m = 1/2 \cdot W_N$, kar zagotavlja povezava $u_N = R_K \cdot i_N$ med napetostjo in tokom napredujočega vala:

$$W_e / l = 1/2 \cdot C / l \cdot u_N^2 = 1/2 \cdot C / l \cdot R_K^2 \cdot i_N^2 = 1/2 \cdot L / l \cdot i_N^2 = W_m / l$$

Ista enakost velja za električno in magnetno energijo osamljenega odbitega vala $W_e = W_m = 1/2 \cdot W_O$, saj povezava $u_O = -R_K \cdot i_O$ med napetostjo in tokom odbitega vala ponovno prinaša $u_O^2 = R_K^2 \cdot i_O^2$.

Ko napredujoči in odbiti val soobstajata na istem delu prenosnega voda, na primer trčenje v trenutku t_3 na časovnem zaporedju slikic, električna in magnetna energija nista več enaki $W_e \neq W_m$! Ko imata napetosti napredujočega in odbitega vala isti predznak, se del magnetne energije pretvori v električno energijo. Obratno, ko imata napetosti napredujočega in odbitega vala različen predznak, se del električne energije pretvori v magnetno energijo.

Ko se napredujoči in odbiti val razideta v trenutku t_4 na časovnem zaporedju slikic, se energija pretvori nazaj v takšno obliko, da za osamljen napredujoči ali osamljen odbiti val ponovno velja $W_e = W_m = 1/2 \cdot W$.

Induktivnost na enoto dolžine L / l in kapacitivnost na enoto dolžine C / l prenosnega voda določata dve novi lastnosti voda: hitrost valovanja v in karakteristično upornost R_K . Hitrost valovanja v je enaka hitrosti svetlobe v snovi, ki je uporabljena kot izolator med vodnikoma TEM prenosnega voda. V primeru trakastega dvovoda je to prazen prostor, torej je hitrost valovanja $v = c_0$ enaka hitrosti svetlobe v praznem prostoru. Dielektrik koaksialnega kabla upočasnjuje svetlobo za faktor $\sqrt{\epsilon_r}$. V koaksialnem kablu s praznim prostorom kot dielektrikom velja $v = c_0$.

Točna geometrija TEM prenosnega voda, torej širina w in razmak trakov d trakastega dvovoda oziroma polmera žile a in oklopa b koaksialnega kabla, nima nobenega vpliva na hitrost valovanja v ! Prečni presek TEM prenosnega voda seveda določa karakteristično upornost R_K . V primeru trakastega dvovoda določa karakteristično upornost razmerje razmak/širina trakov d / w . V primeru koaksialnega kabla določata karakteristično upornost razmerje polmerov oklopa/žile b / a in dielektričnost ϵ_r med njima.