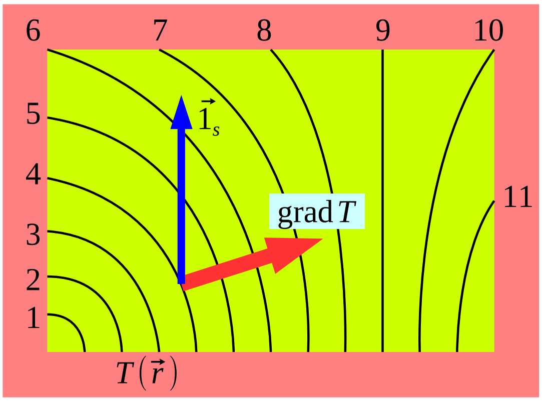
7. Odvajanje skalarnih in vektorskih funkcij

Reševanje fizikalnih nalog, kamor sodi tudi elektrodinamika, zahteva odvajanje oziroma integriranje različnih funkcij po koordinatah prostora. V tri-dimenzijskih nalogah nastopajo funkcije vseh treh koordinat, na primer (x, y, z) ali na kratko $(\vec{r})$. Funkcije so lahko skalarji, na primer temperatura $T(\vec{r})$, ali pa vektorji, na primer sila $\vec{F}(\vec{r})$.

Zagrizeni matematiki na hitro zaključijo, da ima v treh dimenzijah skalarna funkcija tri med sabo neodvisne odvode po vseh treh različnih koordinatah. Vektorsko funkcijo lahko zapišemo po komponentah, torej tri komponente krat tri koordinate daje skupaj devet različnih odvodov. Opisano razmišljanje ima dve hudi pomanjkljivosti: rezultat mogoče nima nobenega fizikalnega pomena ter je odvisen od izbire koordinatnega sistema.

V fiziki je bolj smiselno opisati odvajanje skalarne funkcije treh koordinat $T(\vec{r})$ kot smerni odvod ali gradient. Smerni odvod $\operatorname{grad} T$ je vektor, ki kaže v smeri največje spremembe vrednosti funkcije. Velikost $|\operatorname{grad} T|$ ustreza velikosti odvoda skalarne funkcije po dolžinski enoti v tej smeri:

Smerni odvod (gradient)



$$\frac{\partial T}{\partial s}=\vec{1}_s\cdot(\mathrm{grad}\,T)=\vec{1}_s\cdot(\vec{\nabla}T)$$

$$\mathrm{grad}\,T=\vec{1}_{q1}\frac{\partial T}{\partial l_1}+\vec{1}_{q2}\frac{\partial T}{\partial l_2}+\vec{1}_{q3}\frac{\partial T}{\partial l_3}$$

$$dl_j=h_j dq_j$$

$$\mathrm{grad}\,T=\vec{1}_{q1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T}{\partial q_1}+\vec{1}_{q2}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T}{\partial q_2}+\vec{1}_{q3}\frac{1}{h_3}\frac{\partial T}{\partial q_3}$$

Kartezične koordinate $T(\vec{r})=T(x,y,z)$

$$\mathrm{grad}\,T=\vec{1}_x\frac{\partial T}{\partial x}+\vec{1}_y\frac{\partial T}{\partial y}+\vec{1}_z\frac{\partial T}{\partial z}=\vec{\nabla}T$$

$$\vec{\nabla}=\vec{1}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{1}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{1}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

Valjne koordinate $T(\vec{r})=T(\rho,\varphi,z)$

$$\mathrm{grad}\,T=\vec{1}_\rho\frac{\partial T}{\partial \rho}+\vec{1}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \varphi}+\vec{1}_z\frac{\partial T}{\partial z}$$

Krogelne koordinate $T(\vec{r})=T(r,\Theta,\Phi)$

$$\mathrm{grad}\,T=\vec{1}_r\frac{\partial T}{\partial r}+\vec{1}_\Theta\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \Theta}+\vec{1}_\Phi\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial T}{\partial \Phi}$$

Odvod skalarne funkcije $T(\vec{r})$ v poljubni smeri s izračunamo s skalarnim produktom med smernikom $\vec{1}_s$ in smernim odvodom $\mathrm{grad}\,T$. Komponente smernega odvoda $\mathrm{grad}\,T$ so preprosto odvodi po vseh treh dolžinskih elementih l_1, l_2 in l_3 poljubnega koordinatnega sistema. Odvode po dolžinskih elementih l_1, l_2 in l_3 izračunamo iz odvodov po vseh treh koordinatah q_1, q_2 in q_3 s pomočjo Laméjevih koeficientov h_1, h_2 in h_3.

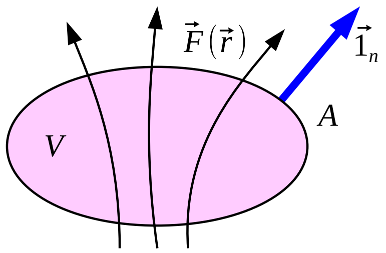
Izračun $\mathrm{grad}\,T$ je najpreprostejši v kartezičnem koordinatnem sistemu (x,y,z). Operator odvajanja lahko v kartezičnih koordinatah zapišemo kot simbolični vektor $\vec{\nabla}$ imenovan »Nabla«, ki deluje na skalarno funkcijo $T(\vec{r})$. Smerni odvod $\mathrm{grad}\,T$ je sicer neodvisen od izbranega koordinatnega sistema in se rezultat njegovega izračuna prav nič ne spremeni ne glede na uporabljeni koordinatni sistem. Le vektorja $\vec{\nabla}$ ne znamo zapisati v drugih koordinatnih sistemih. Bolj točno, $\vec{\nabla}$ nima preprostega zapisa povsod tam, kjer smerniki niso konstantni vektorji.

Kot primera sta prikazana izračuna smernih odvodov v valjnih (ρ,φ,z) in krogelnih (r,Θ,Φ) koordinatah. Laméjevi koeficienti tu ne poskrbijo samo za pravilnost številskega izračuna, pač pa poskrbijo tudi za pravilne merske enote! Odvajanje po dolžini pomeni, da morajo imeti vse komponente smernega odvoda $\operatorname{grad} T$ iste merske enote, ki imajo dodaten meter v imenovalcu $[\mathrm{m}]$ glede na prvotno funkcijo $T(\vec{r})$. Če je temperatura $T(\vec{r})$ izražena v Kelvinih $[\mathrm{K}]$, ima smerni odvod $\operatorname{grad} T$ merske enote $[\mathrm{K/m}]$.

Vektorska funkcija treh koordinat $\vec{F}(\vec{r})$ ima v fizikalnih nalogah dva zanimiva odvoda: izvornost (divergenca) in vrtinčenje (vrtinčnost oziroma rotor). Izvornost vektorske funkcije $\operatorname{div} \vec{F}$ opisuje Gaussov izrek. Pretok vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$ skozi sklenjeno ploskev A je enak vsoti vseh izvorov $\operatorname{div} \vec{F}$ v izbrani prostornini V, ki jo oklepa ploskev A.

Izvornost $\operatorname{div} \vec{F}$ je skalarna veličina, ki opisuje gostoto izvorov v enoti prostornine. Izvornost $\operatorname{div} \vec{F}$ izračunamo tako, da zapišemo Gaussov izrek za diferencialno majhno prostornino $dV \to 0$. Hkrati s prostornino se krči proti nič tudi sklenjena ploskev $A \to 0$. V poljubnem koordinatnem sistemu (q_1, q_2, q_3) zapišemo Gaussov izrek za diferencialno majhen kvader prostornine $dV = dl_1 dl_2 dl_3$:

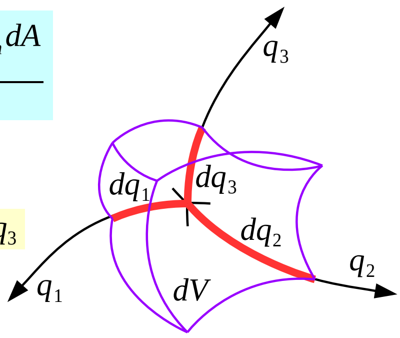
Izvornost (divergenca)



$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{dV \to 0} \frac{\oiint\limits_{A \to 0} \vec{F} \cdot \vec{1}_n dA}{dV}$$

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3$$

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$$



Gaussov izrek

$$\oiint\limits_A \vec{F} \cdot \vec{1}_n dA = \iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{dV} [& -F_1(q_1) dA_{23}(q_1) + F_1(q_1 + dq_1) dA_{23}(q_1 + dq_1) \\ & - F_2(q_2) dA_{13}(q_2) + F_2(q_2 + dq_2) dA_{13}(q_2 + dq_2) \\ & - F_3(q_3) dA_{12}(q_3) + F_3(q_3 + dq_3) dA_{12}(q_3 + dq_3)]\end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_2 h_3 F_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (h_1 h_3 F_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 F_3)}{\partial q_3} \right]$$

$$dA_{ij} = h_i(q_1, q_2, q_3) h_j(q_1, q_2, q_3) dq_i dq_j$$

Kartezične koordinate $\vec{F}(x, y, z) \to \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$

Valjne koordinate $\vec{F}(\rho, \varphi, z) \to \operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

Krogelne koordinate $\vec{F}(r, \Theta, \Phi) \to \operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial (\sin \Theta F_\Theta)}{\partial \Theta} + \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial F_\Phi}{\partial \Phi}$

V krivočrtnem koordinatnem sistemu (q_1, q_2, q_3) se ploskve diferencialno majhnega kvadra $dV = dl_1\, dl_2\, dl_3$ sicer sekajo pod pravim kotom, vendar ploskve niso ravne niti niso enako velike med sabo. Ker so Laméjevi koeficienti $h_1(q_1, q_2, q_3)$, $h_2(q_1, q_2, q_3)$ in $h_3(q_1, q_2, q_3)$ funkcije koordinat, niti nasprotiležne ploskve krivočrtnega kvadra niso enako velike med sabo! Pri krčenju diferencialno majhnega kvadra $dV \rightarrow 0$ dobimo poleg odvodov komponent vektorske funkcije F_1 , F_2 in F_3 tudi odvode Laméjevih koeficientov h_1 , h_2 in h_3 povsod tam, kjer nastopajo v površinah dA_{ij} ploskev krivočrtnega kvadra.

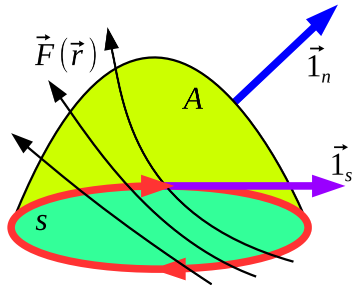
Izračun izvornosti $\mathrm{div}\,\vec{F}$ je najpreprostejši v kartezičnem koordinatnem sistemu. V slednjem je diferencialno majhna prostornina $dV \rightarrow 0$ res pravi kvader z ravnimi in med sabo enakimi nasprotiležnimi ploskvami. Izvornost $\mathrm{div}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ zapišemo kot skalarni produkt vektorja »Nabla« in vektorske funkcije treh koordinat $\vec{F}(\vec{r})$.

Kot primera sta prikazana izračuna izvornosti $\mathrm{div}\,\vec{F}$ v valjnih (ρ, φ, z) in krogelnih (r, Θ, Φ) koordinatah. Laméjevi koeficienti tu ne poskrbijo samo za pravilnost številskega izračuna, pač pa poskrbijo tudi za pravilne merske enote! Tudi izračun izvornosti $\mathrm{div}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ pomeni odvajanje po dolžini. Računanje z vektorjem »Nabla« ni preprosto, ker so smerniki funkcije krivočrtnih koordinat. Izvornost $\mathrm{div}\,\vec{F}$ mora imeti merske enote, ki imajo dodaten meter v imenovalcu $[\mathrm{m}]$ glede na komponente vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$.

Vrtinčenje vektorske funkcije $\mathrm{rot}\,\vec{F}$ opisuje Stokesov izrek. Integral vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$ po sklenjeni krivulji s je enak vsoti vseh vrtincev $\mathrm{rot}\,\vec{F}$ na ploskvi A , ki je vpeta na krivuljo s .

Vrtinčenje (vrtinčnost oziroma rotor) $\mathrm{rot}\,\vec{F}$ (angleško: $\mathrm{curl}\,\vec{F}$) je vektorska veličina, ki kaže v smeri osi vrtenja po pravilu desnega vijaka. V poljubnem koordinatnem sistemu (q_1, q_2, q_3) izračunamo eno komponento vrtinčenja $\overrightarrow{1_{q3}} \cdot (\mathrm{rot}\,\vec{F})$ tako, da zapišemo Stokesov izrek za diferencialno majhno ploskev $dA = dl_1\, dl_2 \rightarrow 0$ v drugih dveh koordinatah. Hkrati s sklenjeno krivuljo $s \rightarrow 0$ se krči proti nič tudi na krivuljo vpeta ploskev $A \rightarrow 0$:

Vrtinčenje (rotor)



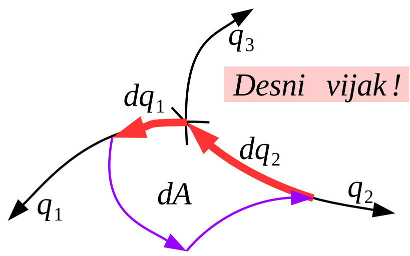
Stokesov izrek

$$\oint\limits_s \vec F\cdot\vec 1_s ds=\iint\limits_A (\operatorname{rot}\vec F)\cdot\vec 1_n dA$$

$$\overrightarrow{1_{q3}}\cdot(\operatorname{rot}\vec F)=\lim_{dA\to 0}\frac{\oint\limits_{s\to 0}\vec F\cdot\vec 1_s ds}{dA}$$

$$dA=dl_1 dl_2=h_1 h_2 dq_1 dq_2$$

$$dl_j=h_j(q_1,q_2,q_3)dq_j$$



$$\overrightarrow{1_{q3}}\cdot(\operatorname{rot}\vec F)=\frac{1}{dA}[F_1(q_2)h_1(q_2)dq_1+F_2(q_1+dq_1)h_2(q_1+dq_1)dq_2 \\ -F_1(q_2+dq_2)h_1(q_2+dq_2)dq_1-F_2(q_1)h_2(q_1)dq_2]$$

$$\overrightarrow{1_{q3}}\cdot(\operatorname{rot}\vec F)=\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial(F_2 h_2)}{\partial q_1}-\frac{\partial(F_1 h_1)}{\partial q_2}\right]$$

$$\operatorname{rot}\vec F=\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\overrightarrow{1_{q1}} & h_2\overrightarrow{1_{q2}} & h_3\overrightarrow{1_{q3}} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot}\vec F(x,y,z)=\begin{vmatrix} \vec 1_x & \vec 1_y & \vec 1_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}=\vec\nabla\times\vec F=\operatorname{curl}\vec F$$

$$\operatorname{rot}\vec F(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec 1_\rho & \rho\vec 1_\varphi & \vec 1_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_z \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot}\vec F(r,\Theta,\Phi)=\frac{1}{r^2\sin\Theta}\begin{vmatrix} \vec 1_r & r\vec 1_\Theta & r\sin\Theta\,\vec 1_\Phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\Theta} & \frac{\partial}{\partial\Phi} \\ F_r & rF_\Theta & r\sin\Theta F_\Phi \end{vmatrix}$$

V krivočrtnem koordinatnem sistemu (q_1,q_2,q_3) se stranice diferencialno majhnega pravokotnika $dA=dl_1 dl_2$ sicer sekajo pod pravim kotom, vendar stranice niso ravne niti niso enako velike med sabo. Ker sta Laméjeva koeficienta $h_1(q_1,q_2,q_3)$ in $h_2(q_1,q_2,q_3)$ funkciji koordinat, niti nasprotiležne stranice krivočrtnega pravokotnika niso enako velike med sabo! Pri krčenju diferencialno majhnega pravokotnika $dA\to 0$ dobimo poleg odvodov komponent vektorske funkcije F_1 in F_2 tudi odvode Laméjevih koeficientov h_1 in h_2 povsod tam, kjer nastopajo v dolžinah dl_j stranic krivočrtnega pravokotnika.

Na podoben način kot komponento $\overrightarrow{1_{q3}}\cdot(\operatorname{rot}\vec F)$ izračunamo še ostali dve komponenti vrtinčenja $\overrightarrow{1_{q1}}\cdot(\operatorname{rot}\vec F)$ in $\overrightarrow{1_{q2}}\cdot(\operatorname{rot}\vec F)$. Celoten izračun vrtinčenja $\operatorname{rot}\vec F$ lahko lepo uredimo v determinanto 3×3, ki spominja na vektorski produkt z dodatki Laméjevih koeficientov pred samo determinanto, v gornjo vrstico determinante s smerniki in v spodnjo vrstico determinante s komponentami vektorske funkcije $\vec F(\vec r)$.

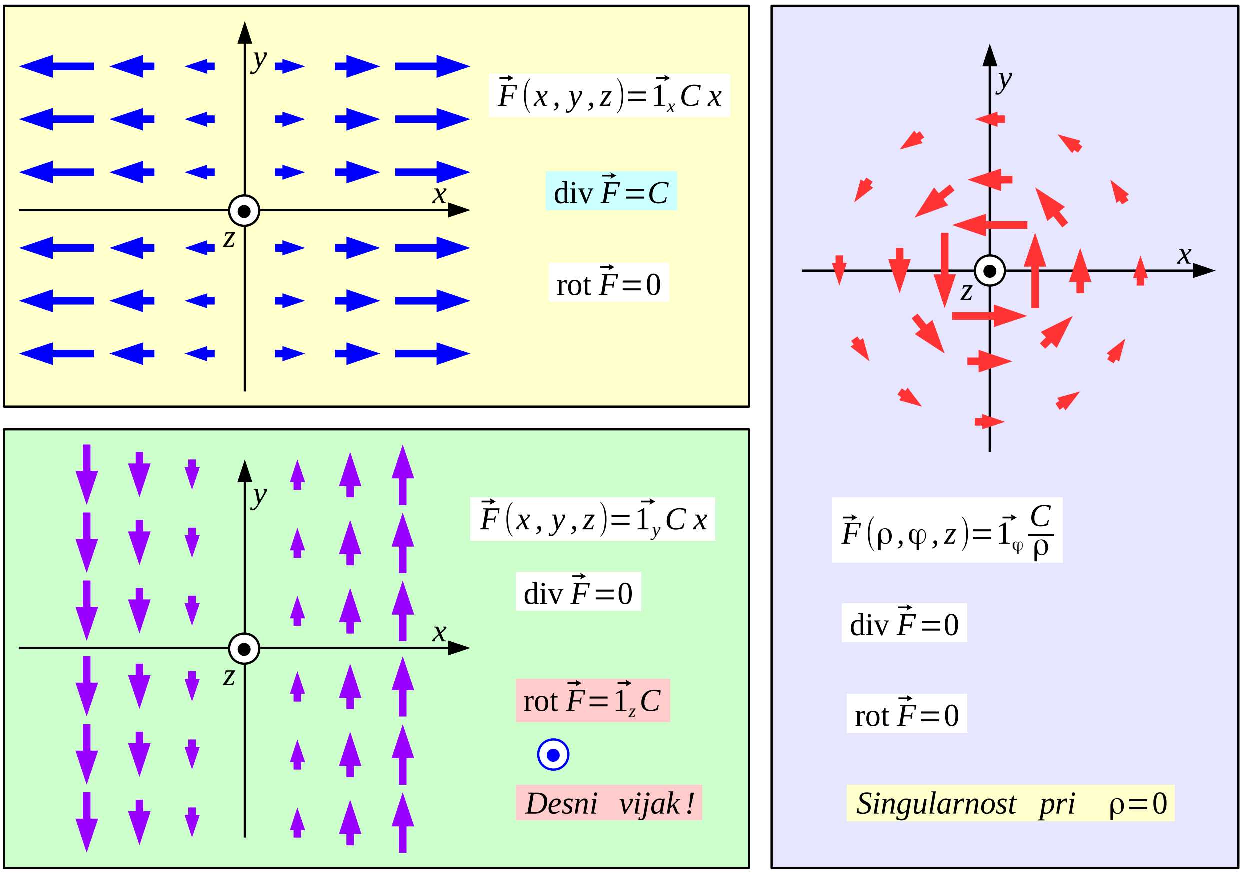
Izračun vrtinčenja $\operatorname{rot}\vec F$ je najpreprostejši v kartezičnem koordinatnem sistemu. V slednjem so diferencialno majhne ploskve $dA_{ij} \to 0$ res pravi pravokotniki z ravnimi in med sabo enakimi nasprotiležnimi stranicami. Vrtinčenje $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ zapišemo kot vektorski produkt vektorja »Nabla« in vektorske funkcije treh koordinat $\vec{F}(\vec{r})$.

Kot primera sta prikazana izračuna vrtinčenja $\mathrm{rot}\,\vec{F}$ v valjnih (ρ, φ, z) in krogelnih (r, Θ, Φ) koordinatah. Laméjevi koeficienti tu ne poskrbijo samo za pravilnost številskega izračuna, pač pa poskrbijo tudi za pravilne merske enote! Vektor vrtinčenja $\mathrm{rot}\,\vec{F}$ mora imeti merske enote, ki imajo dodaten meter v imenovalcu $[\mathrm{m}]$ glede na vektorsko funkcijo $\vec{F}(\vec{r})$.

Glede na različne izraze za vrtinčenje se uporablja oznaka $\mathrm{rot}\,\vec{F}$ v osrednji Evropi oziroma $\mathrm{curl}\,\vec{F}$ v angleško govorečih deželah. V izogibanje zmešnjavi pogosto pišemo vrtinčenje kar kot $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ ne glede na uporabljeni koordinatni sistem, čeprav računanje z vektorjem »Nabla« v krivočrtnih koordinatah ni preprosto.

Izvornost (divergenca) in vrtinčenje (rotor) skupno uporabljata vseh devet med sabo neodvisnih odvodov vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$ v treh dimenzijah. Od teh uporablja izvornost tri odvode komponent po pripadajočih koordinatah, vrtinčenje pa šest odvodov komponent po preostalih koordinatah. Izvornost $\mathrm{div}\,\vec{F}$ in vrtinčenje $\mathrm{rot}\,\vec{F}$ sta torej dve med sabo popolnoma neodvisni funkciji. Z drugimi besedami, vektorsko funkcijo $\vec{F}(\vec{r})$ poznamo do konstante natančno, če poznamo vse njene odvode, torej izvornost $\mathrm{div}\,\vec{F}$ in vrtinčenje $\mathrm{rot}\,\vec{F}$.

Nekaj preprostih zgledov izvornosti $\mathrm{div}\,\vec{F}$ in vrtinčenja $\mathrm{rot}\,\vec{F}$ je prikazanih na spodnji sliki. Levo zgoraj je primer vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$, ki ima izvore. Jakost vektorjev narašča v isti smeri, kamor kažejo vektorji. Naraščajoči pretok zahteva prisotnost izvorov:



Levo spodaj je primer vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$, ki ima vrtince. Velikost vektorjev se v isti smeri ne spreminja, torej izvorov ni. Kakršnakoli sklenjena pot v ravnini xy daje rezultat različen od nič, torej obstajajo vrtinci. Vrtinci imajo vektorski značaj. Vektor vrtinčenja kaže v smeri osi vrtenja, torej v smeri $\vec{1}_z$ po pravilu desnega vijaka.

Zgled na desni zagotovo namiguje na vrtenje. Kljub temu funkcija $\vec{F}(\vec{r})$ nima niti izvorov niti vrtincev? Kakršnakoli sklenjena pot v ravnini xy daje rezultat nič pod pogojem, da pot ne zajame singularnosti v osi z oziroma pri $\rho=0$. Zgled na desni je torej strogo opozorilo: kakršnokoli odvajanje ne deluje pravilno v singularnostih. Singularnosti moramo v naših računih upoštevati na drugačen način, saj tam ne moremo računati odvodov.

Fizikalne naloge pogosto privedejo do diferencialnih enačb druge stopnje. Vsi opisani postopki odvajanja: smerni odvod $\mathrm{grad}\,T$, izvornost $\mathrm{div}\,\vec{F}$ in vrtinčenje $\mathrm{rot}\,\vec{F}$ pomenijo odvajanje prvega reda. Odvode drugega reda dobimo tako, da sestavimo dva postopka odvajanja prvega reda.

V fizikalnih nalogah je najbolj pogost Laplacejev operator odvajanja drugega reda. Laplacejev operator zapišemo z Δ (velika grška črka »Delta«). Iz skalarne funkcije $T(\vec{r})$ naredi (skalarni) Laplace novo skalarno funkcijo ΔT :

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} T)=\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} T)=\Delta T=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Smerni odvod $\operatorname{grad} T$ je vektorska funkcija, torej smemo izračunati njeno vrtinčenje, ki je vedno enako nič:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} T)=\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla} T)=\vec{0} \quad (\textit{vektor nič})$$

Ko bi smerni odvod $\operatorname{grad} T$ imel vrtince, bi pri integriranju dobili različne vrednosti izvorne skalarne funkcije $T(\vec{r})$ odvisno od izbrane integracijske poti, kar zagotovo ni smiselno. Omejitve obstajajo tudi za vrtince, ki ne smejo imeti izvorov:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F})=\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F})=0$$

Ko bi vrtinci imeli izvore, bi bila rezultata integracije vrtincev po dveh različnih ploskvah A_1 in A_2 , vpetih na isto sklenjeno krivuljo s , med sabo različna, kar nasprotuje opisu vrtinčenja s Stokesovim izrekom.

Izvornost sicer pogosto potrebujemo za Gaussov izrek, da zahtevno integracijo po prostornini V prevedemo na manj zahtevo oziroma zanimivejšo integracijo po sklenjeni ploskvi A . Izvornost lahko razvijemo tako za skalarni funkciji $U(\vec{r})$ in $W(\vec{r})$ kot za vektorski funkciji $\vec{A}(\vec{r})$ in $\vec{B}(\vec{r})$:

$$\operatorname{div}(U\operatorname{grad} W-W\operatorname{grad} U)=\vec{\nabla}\cdot(U\vec{\nabla} W-W\vec{\nabla} U)=U\Delta W-W\Delta U$$

$$\operatorname{div}(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot\operatorname{rot} A-\vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{B}$$

Končno se nam pri reševanju enačb v elektrodinamiki pogosto pojavi vrtinčenje vrtinčenja oziroma izraz $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F})$. Izraz skušamo prevesti v Laplace vektorske funkcije oziroma vektorski Laplace, ki je definiran kot:

$$\Delta\vec{F}=\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F})-\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\vec{1}_x\Delta F_x+\vec{1}_y\Delta F_y+\vec{1}_z\Delta F_z$$

Povsem enako kot ostali postopki odvajanja vektorskih funkcij tudi Laplace hkrati učinkuje na posamezne komponente vektorske funkcije in na pripadajoče smernike, če slednji niso konstante. Vektorski Laplace zato v splošnem ni preprosta vsota treh skalarnih Laplacejev posameznih komponent vektorske funkcije. Edino v kartezičnih koordinatah lahko vektorski Laplace preprosto razvijemo v vsoto treh skalarnih Laplacejev na posameznih komponentah vektorske funkcije.

Laplace skalarne funkcije je navsezadnje tisto, kar dejansko znamo rešiti. Poleg kartezičnih koordinat je razvoj v preprostejši skalarni Laplace možen povsod tam, kjer so smerni vektorji konstantni. V valjnih in valjno-eliptičnih koordinatah je smernik $\vec{1}_z$ konstanten, torej smemo komponento z vektorskega Laplaceja $\vec{1}_z \cdot \Delta \vec{F} = \Delta F_z$ zapisati s skalarnim Laplacejem pripadajoče komponente F_z .

* * * * *