9. Vektorski potencial

Reševanje preproste elektrotehnične naloge: kakšni sta polji $\vec{E}(\vec{r})$ oziroma $\vec{H}(\vec{r})$, če poznamo izvore, torej vse tokove $\vec{J}(\vec{r})$ in vse elektrine $\rho(\vec{r})$, vodi v dve komplicirani, vektorski diferencialni valovni enačbi drugega reda. Kompliciran račun skušamo poenostaviti z uvedbo novih vmesnih spremenljivk, ki jih imenujemo potenciali.

Račun je najpreprostejši v elektrostatiki $\partial/\partial t=0$ oziroma $\omega=0$. Takrat je vrtinčenje električnega polja zagotovo enako nič $\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r})=0$. Če je vrtinčenje vektorskega polja enako nič, lahko takšno polje zapišemo kot smerni odvod neke skalarne veličine. Izbrano skalarno funkcijo $V(\vec{r})$ imenujemo kar potencial v elektrostatiki:

$$\vec{E}(\vec{r})=-\operatorname{grad}V(\vec{r})$$

$$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon}\ \rightarrow\ \operatorname{div}(\operatorname{grad}V)=\Delta V=-\frac{\rho}{\epsilon}$$

Žal sta takšen potencial $V(\vec{r})$ in pripadajoča diferencialna enačba skoraj neuporabna v elektrodinamiki, kjer velja $\omega\neq 0$ oziroma $\operatorname{rot}\vec{E}\neq 0$.

Podoben skalarni potencial $V_m(\vec{r})$ lahko uvedemo v magnetostatiki. $\operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r})=0$ zahteva statiko $\partial/\partial t=0$ oziroma $\omega=0$ in hkrati še odsotnost tokov $\vec{J}(\vec{r})=0$ vsaj v tistem delu prostora, kjer uporabljamo $V_m(\vec{r})$. Skalarni magnetni potencial $V_m(\vec{r})$ tedaj določa enačba:

$$\vec{H}(\vec{r})=-\operatorname{grad}V_m(\vec{r})$$

$$\operatorname{div}\vec{H}=0\ \rightarrow\ \operatorname{div}(\operatorname{grad}V_m)=\Delta V_m=0$$

Žal sta takšen potencial $V_m(\vec{r})$ in pripadajoča diferencialna enačba skoraj neuporabna tam, kjer je $\vec{J}(\vec{r})\neq 0$ oziroma v elektrodinamiki, kjer velja $\omega\neq 0$ oziroma $j\omega\vec{D}\neq 0$.

Gostota električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ je vektorska veličina. Njenega učinka zato ne moremo opisati z neko vmesno skalarno veličino, saj skalarna funkcija vsebuje trikrat manj podatkov od vektorske funkcije. Smiselna izbira bo v tem primeru neka vmesna vektorska veličina. Vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ je definiral že James Clerk Maxwell kot:

$$\vec{B}(\vec{r})=\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r}) \quad \text{oziroma} \quad \vec{H}(\vec{r})=\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r})$$

Nova veličina vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ ima mersko enoto $[\mathrm{Vs/m}]$. Pripadajoče električno polje $\vec{E}(\vec{r})$ dobimo iz Faradayevega zakona. Električnemu polju smemo dodati poljuben smerni odvod, na primer $-\mathrm{grad}\,V(\vec{r})$, saj je vrtinčenje slednjega vedno enako nič:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}=-j\omega\vec{B}=-j\omega\,\mathrm{rot}\,\vec{A} \rightarrow \mathrm{rot}(\vec{E}+j\omega\vec{A})=0$$

$$\vec{E}(\vec{r})=-j\omega\vec{A}(\vec{r})-\mathrm{grad}\,V(\vec{r})$$

Polji $\vec{E}(\vec{r})$ in $\vec{H}(\vec{r})$ torej računamo preko vmesnih veličin, vektorskega potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ in skalarnega potenciala $V(\vec{r})$ v poljubni nalogi elektrodinamike, kjer velja $\omega\neq 0$, $\vec{J}(\vec{r})\neq 0$ oziroma $\rho(\vec{r})\neq 0$. Pri tem smo skalarni potencial $V(\vec{r})$ izbrali tako, da je čim bolj podoben tistemu iz elektrostatike. Za oba potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ in $V(\vec{r})$ moramo seveda poiskati točne valovne enačbe v elektrodinamiki.

Valovno enačbo za vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ dobimo iz Ampèrejevega zakona:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}=\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\vec{A}\right)=\vec{J}+j\omega\epsilon\vec{E}=\vec{J}+\omega^2\epsilon\vec{A}-j\omega\epsilon\,\mathrm{grad}\,V$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{A})=\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{A})-\Delta\vec{A}$$

$$\Delta\vec{A}+\omega^2\mu\epsilon\vec{A}=-\mu\vec{J}+\mathrm{grad}(j\omega\mu\epsilon V+\mathrm{div}\,\vec{A})$$

V vsem dosedanjem izvajanju je bilo določeno samo vrtinčenje vektorskega potenciala $\mathrm{rot}\,\vec{A}$. Izvornost vektorskega potenciala $\mathrm{div}\,\vec{A}$ je zaenkrat poljubna, saj je popolnoma neodvisna od vrtinčenja.

Izvornost vektorskega potenciala $\mathrm{div}\,\vec{A}$ lahko izberemo na različne načine. Najbolj preprosta izgleda na prvi pogled Columbova izbira $\mathrm{div}\,\vec{A}=0$ (angleško: Columb gauge). Valovno enačbo za vektorski potencial najbolj poenostavi Lorenzova izbira $j\omega\mu\epsilon V+\mathrm{div}\,\vec{A}=0$ (uvedel

George Francis FitzGerald leta 1888, angleško: Lorenz gauge, po danskem fizike Ludvigu Lorenzu):

$$\Delta \vec{A}(\vec{r})+\omega^2\mu\epsilon\vec{A}(\vec{r})=-\mu\vec{J}(\vec{r})$$

Z Lorenzovo izbiro je vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ odvisen samo od gostote električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ ter ni odvisen od prostorske elektrine $\rho(\vec{r})$. Iz Gaussovega zakona dobimo še valovno enačbo za skalarni potencial $V(\vec{r})$:

$$\mathrm{div}\, E=\frac{\rho}{\epsilon}=\mathrm{div}(-j\omega\vec{A}-\mathrm{grad}\, V)=-\omega^2\mu\epsilon V-\Delta V$$

$$\Delta V(\vec{r})+\omega^2\mu\epsilon V(\vec{r})=-\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}$$

Skalarni potencial $V(\vec{r})$ je z Lorenzovo izbiro odvisen samo od prostorske elektrine $\rho(\vec{r})$ ter ni odvisen od gostote električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$. Čeprav ima skalarni potencial $V(\vec{r})$ mersko enoto $[\mathrm{V}]$, ni neposredno povezan z električno napetostjo U , saj je slednja lahko definirana na različne načine oziroma v marsikateri nalogi elektrodinamike sploh ne obstaja.

Lorenzova izbira omogoča, da lepo ločimo učinka elektrine $\rho(\vec{r})$ in toka $\vec{J}(\vec{r})$. Elektrina $\rho(\vec{r})$ je skalarna veličina in poganja skalarni potencial $V(\vec{r})$. Tok $\vec{J}(\vec{r})$ je vektorska veličina in poganja vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$. Pri tem ne smemo pozabiti, da sta tok $\vec{J}(\vec{r})$ in elektrina $\rho(\vec{r})$ povezana z zahtevo za zveznost $j\omega\rho(\vec{r})+\mathrm{div}\vec{J}(\vec{r})=0$ (kontinuitetna enačba).

Konstanta $\omega^2\mu\epsilon$ nastopa v vseh valovnih enačbah za $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{H}(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$ oziroma $V(\vec{r})$. Konstanto lahko izrazimo na različne načine vključno s hitrostjo valovanja $1/\sqrt{\mu\epsilon}=v[\mathrm{m/s}]$:

$$\omega^2\mu\epsilon=\frac{\omega^2}{v^2}=k^2 \rightarrow k=\frac{\omega}{v}=\omega\sqrt{\mu\epsilon}\equiv \mathit{valovno\ \ število}\ \left[\frac{\mathrm{rd}}{\mathrm{m}}\right]$$

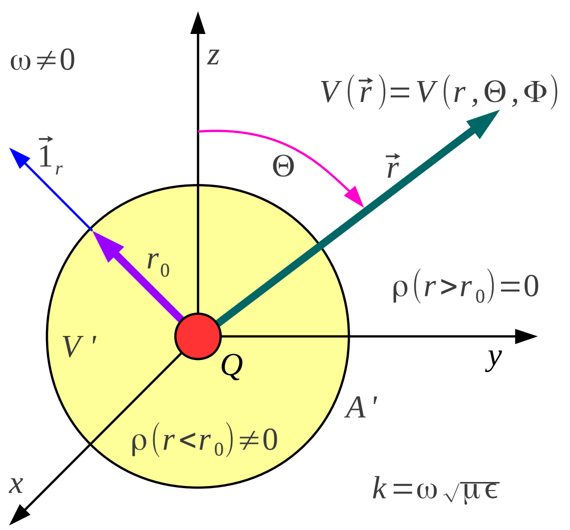
Valovno število k pove, kako hitro se faza spreminja z razdaljo v prostoru. V praznem prostoru seveda velja $\epsilon=\epsilon_0$, $\mu=\mu_0$, $k=k_0$ in $v=c_0\approx 3\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$. Z valovnim številom k obe valovni enačbi za potenciala preprosto zapišemo v frekvenčnem prostoru:

$$\Delta \vec{A}(\vec{r})+k^2\vec{A}(\vec{r})=-\mu \vec{J}(\vec{r})$$

$$\Delta V(\vec{r})+k^2 V(\vec{r})=-\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}$$

Najprej poskusimo poiskati rešitev za skalarno enačbo za $V(\vec{r})$, saj je preprostejša od vektorske enačbe za $\vec{A}(\vec{r})$. Najbolj preprost primer je ena sama točkasta elektrina Q v koordinatnem izhodišču. Takšna elektrina predstavlja singularnost, zato jo omejimo s kroglico s polmerom r_0 :

Točkasta elektrina



$$\text{Zunaj kroglice } \rho(r>r_0)=0 \rightarrow \Delta V+k^2V=0$$

$$\text{Ugibamo rešitev } V(r,\Theta,\Phi)=\frac{C}{r}e^{-jkr}$$

$$\mathrm{grad}\, V=\vec{1}_r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{C}{r}e^{-jkr}\right)=-\vec{1}_r C\left(\frac{1}{r^2}+\frac{jk}{r}\right)e^{-jkr}$$

$$\Delta V=\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, V)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2(-C)\left(\frac{1}{r^2}+\frac{jk}{r}\right)e^{-jkr}\right)$$

$$\Delta V=-\frac{C}{r^2}\left(jk\,e^{-jkr}+(1+jkr)(-jk)e^{-jkr}\right)=-k^2V$$

$$\Delta V+k^2V=-\frac{\rho}{\epsilon} \leftarrow \iiint_{V'} dV'$$

$$\iiint_{V'}\Delta V\, dV'+\iiint_{V'}k^2V\, dV'=\iiint_{V'}-\frac{\rho}{\epsilon}dV'=-\frac{Q}{\epsilon}$$

$$\iiint_{V'}\Delta V\, dV'=\iiint_{V'}\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, V)\,dV'=\oiint_{A'}\mathrm{grad}\, V\cdot\vec{1}_r\, dA'=\mathrm{grad}\, V\cdot\vec{1}_r\, 4\pi r_0^2=-4\pi C(1+jkr_0)e^{-jkr_0}$$

$$r_0\rightarrow 0 \qquad -4\pi C(1+jkr)e^{-jkr}\rightarrow -4\pi C$$

$$-4\pi C=-\frac{Q}{\epsilon}$$

$$\iiint_{V'}k^2V\, dV'=\int_0^{r_0}k^2\frac{C}{r}e^{-jkr}4\pi r^2 dr\rightarrow 0$$

$$C=\frac{Q}{4\pi\epsilon}$$

$$V(r,\Theta,\Phi)=\frac{Q}{4\pi\epsilon r}e^{-jkr}$$

Zunaj kroglice $r>r_0$ ni elektrin niti singularnosti. Zunaj kroglice rešujemo poenostavljeno valovno enačbo brez izvorov. Rešitev za $V(\vec{r})=V(r,\Theta,\Phi)$ ugibamo v krogelnih koordinatah. V elektrostatiki je potencial točkaste elektrine točno obratno sorazmeren razdalji $1/r$. V elektrodinamiki sklepamo, da bo potencial $V(\vec{r},t)$ zakasnjen učinek elektrine $Q(t')=Q(t-r/v)$. V frekvenčnem prostoru pomeni opisana zakasnitev fazni zasuk $\phi=-kr$, kjer minus pomeni zaostajanje faze.

Diferencialna enačba drugega reda zahteva dve neodvisni rešitvi, v opisanem primeru s členoma e^{+jkr} in e^{-jkr}. Člen e^{+jkr} fizikalno ni smiseln, ker je potencial $V(\vec{r})$ posledica elektrine Q, torej sme biti kvečjemu zakasnjen. Fizikalno torej zadošča rešitev e^{-jkr} in ena sama pripadajoča konstanta C.

V notranjosti kroglice $r<r_0$ smemo poskusiti z enako rešitvijo za potencial $V(\vec{r})$, čeprav elektrina $\rho(\vec{r})$ tam ne bo prav povsod enaka nič. Česar v notranjosti kroglice ne znamo narediti, v singularnosti v koordinatnem izhodišču ne znamo izračunati diferencialnih operacij $\operatorname{grad} V$ niti ΔV. Valovno enačbo zato integriramo po celotni prostornini V' kroglice.

Izračun $\Delta V = \operatorname{div}(\operatorname{grad} V)$ v singularnosti v koordinatnem izhodišču zaobidemo tako, da integral po prostornini V' kroglice pretvorimo s pomočjo Gaussovega izreka oziroma definicije izvornosti v integral po površini kroglice A', kjer ni singularnosti in znamo izračunati $\operatorname{grad} V$. Sam potencial V smemo integrirati po celotni prostornini kroglice singularnosti navkljub, saj je vrednost integrala omejena in gre proti nič, če kroglico manjšamo v nič, $r_0 \rightarrow 0$.

V opisani nalogi opazimo, da nam primanjkuje različnih črk! Črko V uporabljamo tako za potencial kot za prostornino kroglice, zato slednjo označimo z V'. Črko A uporabljamo tako za vektorski potencial $\vec{A}$ kot za površino, zato slednjo označimo z A'. Končno, črko ρ uporabljamo tako za gostoto elektrine kot za valjno koordinato, ki v opisani nalogi na srečo ne nastopa.

Integracija desne strani valovne enačbe je preprosta, seštejemo vse elektrine znotraj kroglice. Za eno samo točkasto elektrino Q v koordinatnem izhodišču dobimo $-Q/\epsilon$. Z manjšanjem kroglice v nič $r_0 \rightarrow 0$ dobimo iskano konstanto $C=Q/(4\pi\epsilon)$. Rešitev valovne enačbe za skalarni potencial ene same točkaste elektrine Q v koordinatnem izhodišču se torej glasi:

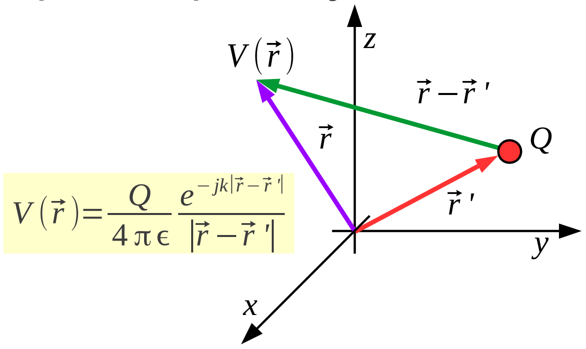
$$V(\vec{r})=\frac{Q}{4\pi\epsilon r}e^{-jkr}$$

Opisano rešitev valovne enačbe lahko takoj posplošimo za elektrino Q na poljubnih koordinatah $\vec{r}\,'$ tako, da prestavimo izhodišče koordinatnega sistema. Razdaljo r tedaj nadomesti izraz $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$.

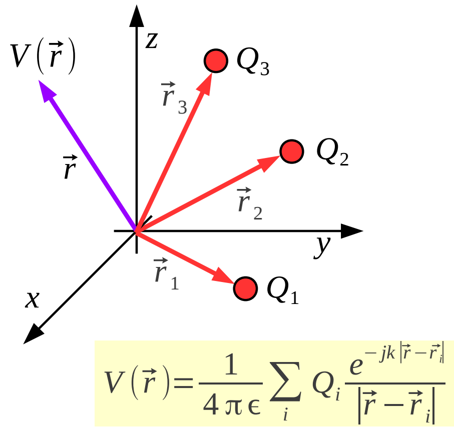
Ker je valovna enačba linearna, je vsota veljavnih rešitev prav tako rešitev iste enačbe. Izraz za potencial ene točkaste elektrine smemo torej razširiti na vsoto potencialov več točkastih elektrin Q_1 , Q_2 , Q_3 … na pripadajočih koordinatah $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ ...

Končno lahko vsoto točkastih elektrin Q_1 , Q_2 , Q_3 … prevedemo na integral prostorske elektrine $\rho(\vec{r}\,')$:

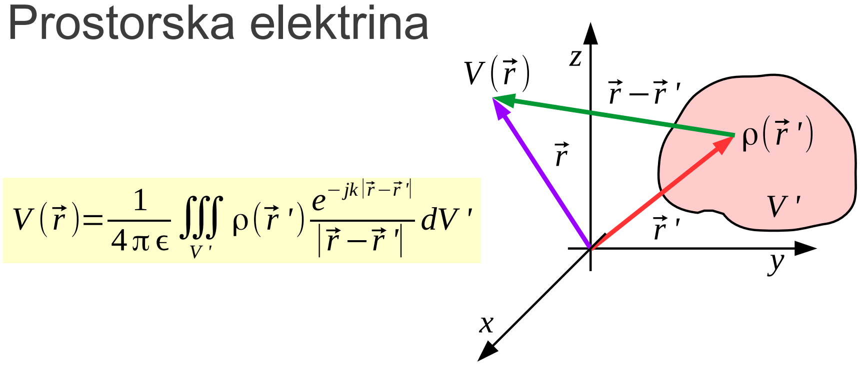
Splošen položaj elektrine



Več elektrin



Prostorska elektrina



Valovno enačbo za vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ razstavimo na komponente v kartezičnem koordinatnem sistemu (x,y,z) . Konstantni smerni vektorji slednjega omogočajo preprosto razstavljanje Laplaceja vektorske funkcije $\Delta\vec{A}(\vec{r})$. Dobimo tri skalarne valovne enačbe:

$$\Delta A_x(\vec{r})+k^2A_x(\vec{r})=-\mu J_x(\vec{r})$$

$$\Delta A_y(\vec{r})+k^2A_y(\vec{r})=-\mu J_y(\vec{r})$$

$$\Delta A_z(\vec{r})+k^2A_z(\vec{r})=-\mu J_z(\vec{r})$$

Matematično povsem enakovredno skalarno valovno enačbo za

$V(\vec{r})$ smo že rešili. Torej uporabimo isti postopek reševanja tudi za tri skalarne enačbe za komponente vektorskega potenciala $A_x(\vec{r})$, $A_y(\vec{r})$ in $A_z(\vec{r})$. Dobimo tri obrazce za izračun komponent:

$$A_x(\vec{r})=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_{V'} J_x(\vec{r}\,')\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'$$

$$A_y(\vec{r})=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_{V'} J_y(\vec{r}\,')\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'$$

$$A_z(\vec{r})=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_{V'} J_z(\vec{r}\,')\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'$$

Vse tri rešitve lahko preprosto združimo v vektorski zapis, ki velja v poljubnem (tudi krivočrtnem) koordinatnem sistemu:

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}\,')\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'$$

Iz obrazca za izračun vektorskega potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ je razvidno, da ima slednji isto smer kot tok $\vec{J}(\vec{r})$, ki ga poganja. Informacija o smeri gibanja elektrin se torej neposredno prenaša v vektorski potencial. Končni obrazec za izračun vektorskega potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ je silno podoben obrazcu za izračun skalarnega potenciala $V(\vec{r})$:

$$V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon}\iiint_{V'} \rho(\vec{r}\,')\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'$$

Oba gornja obrazca imata skupno ime: obrazca za zakasnjena potenciala (angleško: retarded potentials). Ime zakasnjena potenciala izvira iz strogega upoštevanja zakasnitve učinka izvora v točki opazovanja potenciala, kar zahteva relativistika.

Med valovnima enačbama za vektorski in skalarni potencial ter obrazcema za izračun vektorskega in skalarnega potenciala je nekaj pomembnih razlik. Valovni enačbi veljata v poljubni točki prostora s koordinatami $\vec{r}$. Izvora $\vec{J}(\vec{r})$ in $\rho(\vec{r})$ imata iste koordinate kot potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ in $V(\vec{r})$ v valovnih enačbah. Rešitev diferencialne valovne enačbe ni samoumevna. Diferencialna enačba naleti na težave ob singularnostih.

Obrazca za izračun vektorskega in skalarnega potenciala uporabljata dvoje različnih koordinat. Koordinate izvorov $\vec{r}\,'$ so označene s črtico kot tudi pripadajoča prostornina $V\,'$ in podobno. Koordinate izračunanih potencialov so označene brez črtic $\vec{r}$. Koordinate izvorov $\vec{r}\,'$ so pri tem popolnoma neodvisne od koordinat potencialov $\vec{r}$. Pri odvajanju ali integriranju moramo zato paziti, s katerimi koordinatami računamo: s položajem virov $\vec{r}\,'$ ali s položajem učinkov (potencialov) $\vec{r}$?

Integriranje je samoumevno seštevanje učinkov več izvorov. Integriranje je zelo odporno na singularnosti. Integracijo gostote elektrine $\rho(\vec{r})$ zlahka prevedemo na vsoto točkastih elektrin Q_i . Prostorsko integracijo gostote električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ zlahka prevedemo na eno-dimenzijsko integracijo vzdolž žice, ki vodi tok I .

Obrazca za zakasnjena potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ in $V(\vec{r})$ ne vsebujeta vrtinčenja. Do točnega električnega polja $\vec{E}(\vec{r})$ torej lahko pridemo v elektrodinamiki brez magnetnih veličin in brez pravila desnega vijaka! V obrazcu za izračun električnega polja $\vec{E}(\vec{r})$ iz potencialov $\vec{A}(\vec{r})$ in $V(\vec{r})$:

$$\vec{E}(\vec{r})=-j\,\omega\,\vec{A}(\vec{r})-\mathrm{grad}\,V(\vec{r})$$

nastopajo samo še koordinate točke $\vec{r}$, kjer v isti točki prostora hkrati opazujemo oba potenciala in polje. Smerni odvod v gornjem obrazcu za $\vec{E}(\vec{r})$ torej računamo po koordinatah $\vec{r}$!

* * * * *