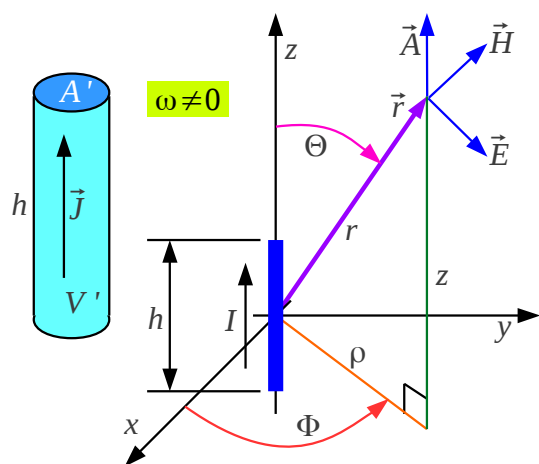


# 11. Elektromagnetno sevanje

Navidez preprosta elektrotehnična naloga je izračun elektromagnetnega polja  $\vec{H}(\vec{r})$  in  $\vec{E}(\vec{r})$ , ki ga poganja tok  $I$  v kratkem odseku žice dolžine  $h$ , kar imenujemo tokovni element. Račun si poenostavimo tako, da žico (vir) postavimo v koordinatno izhodišče in računamo polje (učinek) v krogelnih koordinatah  $(r, \Theta, \Phi)$ . V magnetostatiki  $\omega = 0$  sta opisano nalogo rešila Jean-Baptiste Biot in Félix Savart že davnega leta 1820, torej kar nekaj let pred Ampèrem in Faradayem.

V elektrodinamiki  $\omega \neq 0$  isto nalogo poskusimo rešiti preko potencialov. Gostota električnega toka  $\vec{J}(\vec{r}')$  v žici poganja vektorski potencial  $\vec{A}(\vec{r})$  v prostoru okoli žice. Račun si poenostavimo tako, da integriramo gostoto toka  $\vec{J}(\vec{r}')$  po preseku žice  $A'$  v tok  $I$  in privzamemo, da je odsek žice kratek v primerjavi s točko opazovanja polja  $h \ll r$  in hkrati kratek v primerjavi z valovno dolžino  $h \ll \lambda$ :

## Tokovni element



$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}(\vec{r})$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{J}(\vec{r}') = \vec{1}_z \frac{I}{A'}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \vec{1}_z I \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dz'$$

$$dV' = A' dz'$$

$$(1) \quad h \ll r \rightarrow \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r}$$

$$(2) \quad h \ll \lambda = \frac{2\pi}{k} \rightarrow e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx e^{-jkr}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{1}_z \frac{\mu I h}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r}$$

$$\vec{1}_z = \vec{1}_r \cos \Theta - \vec{1}_\Theta \sin \Theta$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = (\vec{1}_r \cos \Theta - \vec{1}_\Theta \sin \Theta) \frac{\mu I h}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I h}{4\pi} \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \begin{vmatrix} \vec{1}_r & r \vec{1}_\Theta & r \sin \Theta \vec{1}_\Phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \Theta} & \frac{\partial}{\partial \Phi} \\ \frac{e^{-jkr}}{r} \cos \Theta & -r \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \Theta & 0 \end{vmatrix} = \vec{1}_\Phi \frac{I h}{4\pi} e^{-jkr} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \Theta$$

Sevanje

Biot-Savart

Rezultat za vektorski potencial  $\vec{A}(\vec{r})$  pretvorimo v krogelne

koordinate, da z izračunom vrtinčenja pridemo do pripadajoče magnetne poljske jakosti  $\vec{H}(\vec{r})$ . Elektrodinamika  $\omega \neq 0$  zanesljivo dodaja rezultatu zakasnitev  $e^{-jkr}$ . Poleg zakasnitve vsebuje rezultat še dodaten člen  $jk/r$  v primerjavi z Biot-Savartovim zakonom iz magnetostatike. Biot-Savartov člen  $1/r^2$  je pri majhnih razdaljah  $r$  in nizkih frekvencah (majhen  $k = \omega/v$ ) dosti večji od dodatnega člena  $jk/r$ , da slednjega sploh ne opazimo.

Dodatni člen  $jk/r$  postaja čedalje pomembnejši z večanjem razdalje  $r$  in višanjem frekvence (višanjem  $k$ ). Pri velikih razdaljah  $r$  in visokih frekvencah  $\omega$  dodatni člen  $jk/r$  povsem prevlada, saj tam Biot-Savartov člen  $1/r^2$  popolnoma presahne. Pri velikih razdaljah  $r$  in visokih frekvencah  $\omega$  ima pripadajoče elektromagnetno polje povsem drugačne lastnosti. Opisani pojav imenujemo elektromagnetno sevanje.

Biot-Savartov zakon sicer opisuje magnetno polje kratkega odseka žice, ampak pri tem privzema, da več takšnih kratkih odsekov sestavlja sklenjeno zanko s tokom  $I$ . En sam odsek žice v statiki fizikalno ni smiselno, saj električni tok  $I$  ne more izvirati iz nič na začetku žice niti ponikniti v nič na koncu žice.

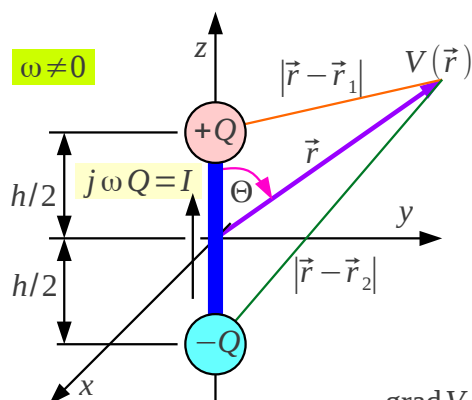
V elektrodinamiki  $\omega \neq 0$  opisuje ponor oziroma izvor toka zahteva za zveznost toka in elektrine:

$$I = \pm \frac{dQ}{dt} = \pm j \omega Q$$

Osamljen odsek žice s tokom  $I$  je v elektrodinamiki fizikalno popolnoma utemeljen, če ga dopolnimo z elektrinama  $-Q$  in  $+Q$  na začetku in na koncu žice. Elektrini  $-Q$  in  $+Q$  poganjata skalarni potencial  $V(\vec{r})$ . Izračun slednjega si poenostavimo, če upoštevamo, da sta elektrini  $-Q$  in  $+Q$  na majhni razdalji  $h \ll \lambda$  v primerjavi z valovno dolžino in hkrati na majhni razdalji  $h \ll r$  v primerjavi s točko opazovanja  $V(\vec{r})$ .

Ker sta elektrini  $-Q$  in  $+Q$  enako veliki ampak nasprotnih predznakov, se pri razvoju funkcij v vrste največji členi med sabo natančno uničujejo. Pri poenostavitvah razdalje  $|\vec{r} - \vec{r}_i|$ , faze  $e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}_i|}$ , amplitude  $1/|\vec{r} - \vec{r}_i|$  in nadaljnjem računanju moramo zato upoštevati vsaj dva največja člena razvoja v vrsto posamezne funkcije:

## Zveznost toka in elektrine



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_i Q_i \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}_i|}}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

$$Q_i = \pm Q = \pm \frac{I}{j\omega}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}_i| = \sqrt{r^2 + (h/2)^2 \mp 2r(h/2)\cos\Theta} \approx r \mp \frac{h}{2}\cos\Theta$$

$$e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}_i|} \approx e^{-jkr} \left( 1 \pm \frac{jkh}{2}\cos\Theta \right)$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \approx \frac{1}{r} \left( 1 \pm \frac{h}{2r}\cos\Theta \right)$$

$$V(\vec{r}) \approx \frac{Qh}{4\pi\epsilon r} e^{-jkr} \left( jk + \frac{1}{r} \right) \cos\Theta$$

$$-\text{grad } V(\vec{r}) = \frac{Qh}{4\pi\epsilon} e^{-jkr} \left[ \hat{1}_r \left( -\frac{k^2}{r} + \frac{2jk}{r^2} + \frac{2}{r^3} \right) \cos\Theta + \hat{1}_\Theta \left( \frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \sin\Theta \right]$$

$$-j\omega \vec{A}(\vec{r}) = -j\omega (\hat{1}_r \cos\Theta - \hat{1}_\Theta \sin\Theta) \frac{\mu(j\omega Q)h}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} = \frac{Qh}{4\pi\epsilon} e^{-jkr} \left[ \hat{1}_r \frac{k^2}{r} \cos\Theta - \hat{1}_\Theta \frac{k^2}{r} \sin\Theta \right]$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{A}(\vec{r}) - \text{grad } V(\vec{r})$$

Sevanje

$$\mu\omega^2 = \frac{k^2}{\epsilon}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Qh}{4\pi\epsilon} e^{-jkr} \left[ \hat{1}_r \left( \frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) 2\cos\Theta + \hat{1}_\Theta \left( -\frac{k^2}{r} + \frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \sin\Theta \right]$$

Točkasti statični dipol

$$\text{Ampère } \vec{J}(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \text{rot } \vec{H}(\vec{r})$$

Osamljen odsek žice s tokom  $I$  v elektrodinamiki poganja poleg magnetnega polja  $\vec{H}(\vec{r})$  tudi električno polje  $\vec{E}(\vec{r})$ . Slednje izračunamo iz obeh potencialov po izrazu:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{A}(\vec{r}) - \text{grad } V(\vec{r})$$

Popolnoma enak rezultat za električno polje  $\vec{E}(\vec{r})$  dobimo iz Ampèrejevega zakona. Pri tem upoštevamo, da je gostota električnega toka skoraj povsod v prostoru  $\vec{J}(\vec{r}) = 0$  enaka nič razen v žici v koordinatnem izhodišču. Maxwellove enačbe pri tem niso bližnjica, saj zahtevajo izbiro predznaka magnetnih veličin, izbiro desnosučnega koordinatnega sistema in dvakratni izračun vrtinčenja. Neposredna pot do električnega polja  $\vec{E}(\vec{r})$  preko potencialov ne zahteva nič od navedenega:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \text{rot } \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \text{rot} \left[ \text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \vec{A}(\vec{r}) \right) \right]$$

Električno polje  $\vec{E}(\vec{r})$  lahko izrazimo s tokom  $I$  ali z elektrinama  $-Q$  in  $+Q$ . Izraz z elektrinama je povsem smiseln tudi v statiki  $\omega = 0$  in  $k = 0$ , ko preostala člena natančno ustrezata izrazu za potencial  $V(\vec{r})$

točkastega statičnega električnega dipola. Slednji vsebuje par (enako velikih) elektrin nasprotnih predznakov  $-Q$  in  $+Q$  na majhni razdalji  $h \ll r$  in njegov potencial  $V(\vec{r})$  upada obratno sorazmerno kubu  $1/r^3$  razdalje.

Tokovni element je z drugimi besedami točkasti dinamični električni dipol. Pri  $\omega=0$  električni dipol vsebuje le dve elektrini  $-Q$  in  $+Q$ , ki mirujeta na pripadajočih elektrodah. Pri  $\omega \neq 0$  električni dipol potrebuje še tok  $I$  v žici, da na elektrodi izmenično privede oziroma od tam odvede elektrini  $-Q$  in  $+Q$ .

Poleg opisa statičnega točkastega dipola vsebuje izraz za električno polje  $\vec{E}(\vec{r})$  še več dinamičnih členov. Podobno kot izraz za magnetno polje  $\vec{H}(\vec{r})$  tudi izraz za električno polje  $\vec{E}(\vec{r})$  vsebuje člen  $-k^2/r$ , ki upada obratno sorazmerno  $1/r$  z razdaljo in opisuje elektromagnetno sevanje. Preostala dinamična člena  $jk/r^2$  opisujeta energijo, ki niha v bližnji okolici električnega dipola.

Pomen posameznih členov je odvisen od razdalje opazovanja  $r$  in frekvence  $\omega = 2\pi f$ , ki določa valovno število  $k = \omega/v$  oziroma v praznem prostoru  $k_0 = \omega/c_0$ . Na majhnih razdaljah in pri nizkih frekvencah prevladujeta statična člena  $1/r^3$ . Na velikih razdaljah in pri visokih frekvencah prevladuje sevanje  $-k^2/r$ .

Praktični pomen posameznih členov je prikazan v spodnji tabeli za tri značilne naloge elektrotehnike: elektroenergetsko omrežje, radio in svetlobo. V laboratorijskem poskusu na razdalji  $r=1\text{ m}$  velikost posameznih členov neposredno opisuje valovno število  $k$  oziroma njegov kvadrat  $k^2$ :

Primerjava nalog elektrotehnike	Omrežna frekvenca v energetiki $f=50\text{ Hz}$	Radijski brezvrvični telefon $f=900\text{ MHz}$	Zelena vidna svetloba $\lambda=0.5\text{ }\mu\text{m}$ $f=600\text{ THz}$
Valovno število $k$	$1.05 \cdot 10^{-6}\text{ rd/m}$	$18.9\text{ rd/m}$	$1.26 \cdot 10^7\text{ rd/m}$
$k^2$	$1.15 \cdot 10^{-12}\text{ rd}^2/\text{m}^2$	$355\text{ rd}^2/\text{m}^2$	$1.58 \cdot 10^{14}\text{ rd}^2/\text{m}^2$
Členi so enako veliki pri $r=1/k$	955 km	5.3 cm	80 nm

Za opis in načrtovanje večine elektroenergetskih naprav popolnoma

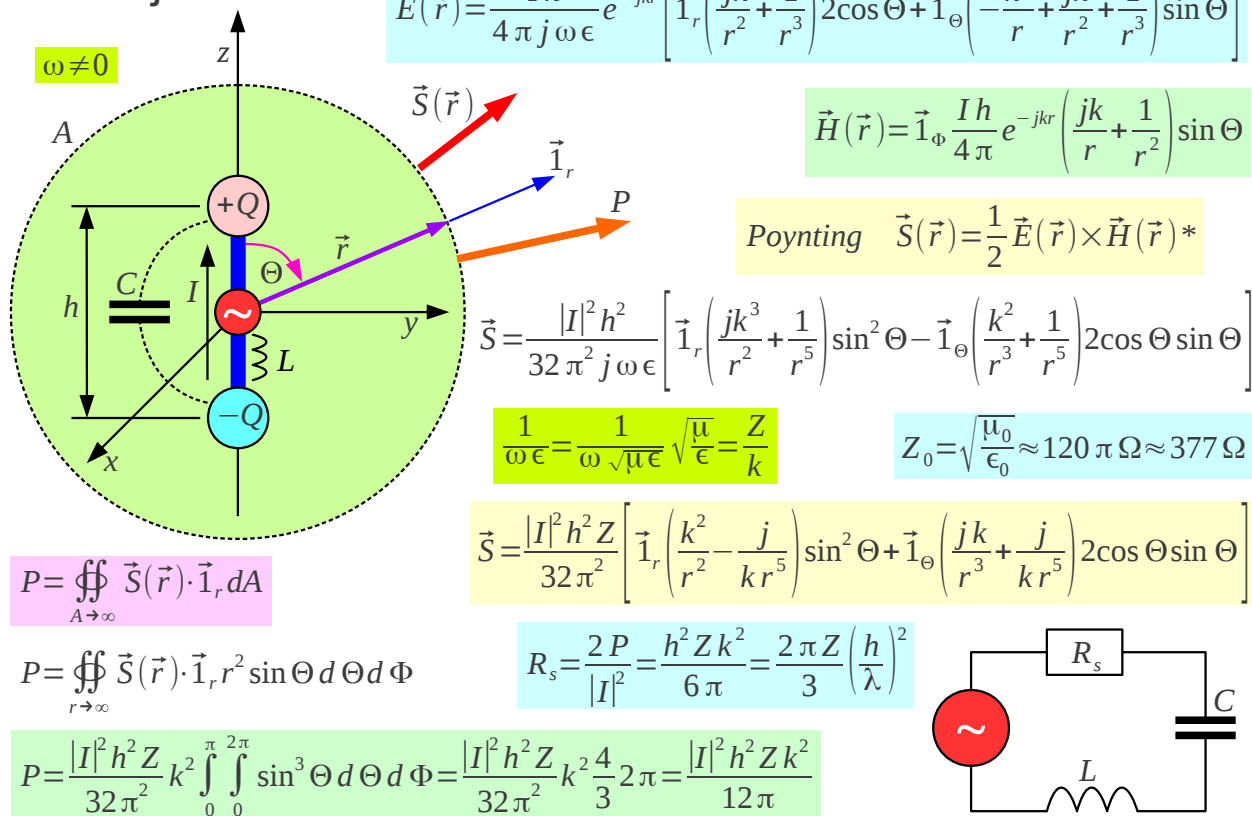
zadoščata elektrostatika in magnetostatika. Na razdalji  $r=1\text{ m}$  so členi  $k$  oziroma  $k^2$  manjši od pogreška vseh razpoložljivih merilnih inštrumentov! V elektroenergetiki opazimo pojave elektrodinamike šele pri daljinovodih, daljših od nekaj sto kilometrov!

Večino pojavov vidne svetlobe popolnoma opisuje elektromagnetno sevanje. Statična člena in preostala dinamična člena so zanemarljivo majhni v primerjavi s sevanjem celo v notranjosti mikroskopsko majhnega čipa polprevodniškega laserja ali fotodiode. Sevanje, dinamična člena in statična člena so približno enako veliki na razdalji  $r=80\text{ nm}$  oziroma komaj nekaj sto atomov ali molekul snovi.

V področju radijskih frekvenc so sevanje, dinamična člena in statična člena istega velikostnega razreda na razdaljah preprostega laboratorijskega poskusa, to se pravi nekaj centimetrov do nekaj metrov. Ker primerni merilni pripomočki za področje radijskih frekvenc niso bili dostopni, sta se elektrotehnika (statika) in optika (sevanje) dolga stoletja obravnavali povsem ločeno. Šele Heinrich Rudolf Hertz je s poskusi leta 1889 končno povezal elektrotehniko in optiko.

Elektromagnetno sevanje je dodaten pojav, ki nima razlage v elektrostatiki niti v magnetostatiki. Razlika med statiko in sevanjem je najbolj očitna v pogledu energije oziroma moči. Različne pojave statike in sevanja zato nazorno opisuje Poyntingov vektor  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^*/2$  gostote pretoka moči. Slednjega preprosto določimo iz znanega električnega in magnetnega polja katerekoli naprave, v tem primeru točkastega dinamičnega električnega dipola:

# Sevanje moči



Izračunani Poyntingov vektor  $\vec{S}(\vec{r})$  ima realni in imaginarni del. Imaginarni del je jalova moč, torej energija, ki niha v bližnji okolici točkastega dinamičnega električnega dipola. Nihajoča energija vsebuje električno energijo in magnetno energijo, kar je skladno razlagam iz elektrostatike in magnetostatike. Magnetno energijo vsebuje induktivnost  $L$  žice, električno energijo pa kapacitivnost  $C$  med koncema žice.

Realni del Poyntingovega vektorja  $\vec{S}(\vec{r})$  pomeni delovno moč. Delovna moč nima razlage niti v elektrostatiki niti v magnetostatiki, saj naprava ne vsebuje nobene snovi z izgubami  $\gamma \neq 0$  oziroma nobenih uporov  $R$  niti feromagnetnih jeder z izgubami? Opisano napravo sestavljata le kovinska žica z neskončno veliko prevodnostjo  $\gamma = \infty$  (ni padca napetosti  $U = 0$ ) in neskončno velik prazen prostor okoli nje  $\mu_0, \epsilon_0$  brez vsakršnih izgub  $\gamma = 0$ , torej brez prevodnih tokov  $\vec{J}(\vec{r}) = 0$ .

Iz Poyntingovega vektorja  $\vec{S}(\vec{r})$  razberemo, da delovna moč potuje iz koordinatnega središča, kjer se nahaja dinamični električni dipol, v vseh smereh v neskončnost. Če seštejemo pretok moči skozi površino krogle, ki oklepa izhodišče koordinatnega sistema, dobimo na poljubni razdalji  $r$  povsod enako delovno moč  $\text{Re}[P]$ . Na velikih razdaljah  $r \rightarrow \infty$  jalova moč povsem presahne, seštevanje pretoka skozi površino krogle daje tam

povsem delovno moč  $P(\infty) = \operatorname{Re}[P]$  .

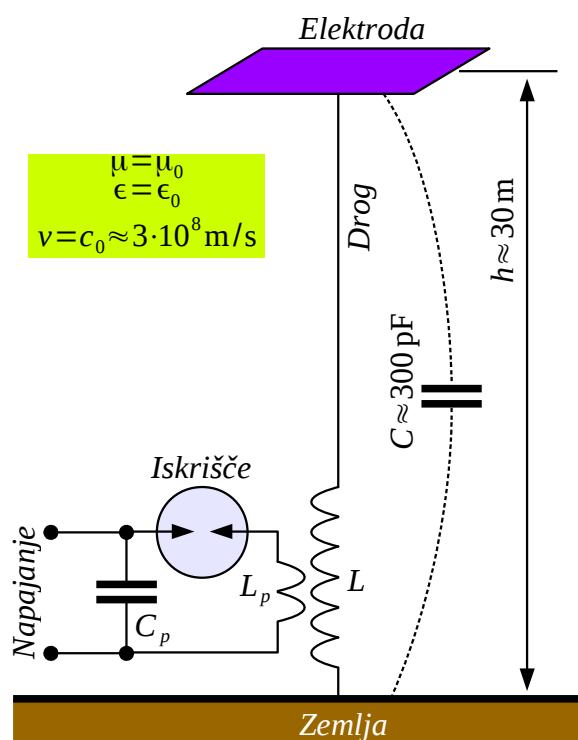
Fizikalna razlaga pravi, da majhen dinamični električni dipol seva delovno moč  $\operatorname{Re}[P]$  . Moč  $\operatorname{Re}[P]$  potuje proč od dinamičnega dipola in se pri tem razširja v prostoru. Moč  $\operatorname{Re}[P]$  potuje v neskončnost in se nikoli več ne vrne k izvoru v koordinatnem izhodišču.

Nadomestno vezje majhnega dinamičnega električnega dipola moramo dopolniti. V koordinatno izhodišče postavimo izmenični vir, ki bo poganjal tok  $I$  v dinamičnem električnem dipolu. Izmenični vir občuti zaporedno vezavo treh bremen: induktivnost žice  $L$  dinamičnega dipola, kapacitivnosti med koncema žice  $C$  in sevalno upornost  $R_s$  .

Sevalna upornost  $R_s$  pomeni za izmenični vir delovno breme, čeprav naprava ne vsebuje nobenega upora oziroma drugačne snovi z izgubami. Preko sevalne upornosti  $R_s$  izmenični vir dovaja delovno moč  $\operatorname{Re}[P]$  , ki se nato izseva v prostor, razširja skoraj v vse smeri (z izjemo osi  $z$  ) in pri tem potuje v neskončnost.

Pojav sevanja delovne moči  $\operatorname{Re}[P]$  in pripadajoče sevalne upornosti  $R_s$  ni vedno preprosto opaziti. Nikola Tesla je konec 19. stoletja izdelal številne visokofrekvenčne transformatorje z izkoriščanjem rezonance sekundarnega navitja v frekvenčnem področju okoli  $f \approx 30 \text{ kHz}$  . Največje naprave, izdelane okoli leta 1900 so bile visoke tudi do  $h \approx 30 \text{ m}$  :

## Teslov transformator



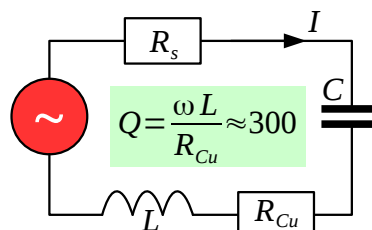
$$f \approx 30 \text{ kHz}$$

$$\omega = 2\pi f \approx 1.885 \cdot 10^5 \text{ rd/s}$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \approx 10 \text{ km}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120 \pi \Omega$$

$$R_s = \frac{2\pi Z_0}{3} \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \approx 80 \pi^2 \Omega \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \approx 7.1 \text{ m}\Omega$$



$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \approx 17.68 \text{ k}\Omega$$

$$R_{Cu} = \frac{\omega L}{Q} \approx 58.9 \Omega$$

$$\eta = \frac{P_s}{P_s + P_{Cu}} = \frac{R_s}{R_s + R_{Cu}} \equiv \text{sevalni izkoristek}$$

$$\eta \approx \frac{0.0071 \Omega}{0.0071 \Omega + 58.9 \Omega} \approx 1.2 \cdot 10^{-4}$$

Teslovi transformatorji proizvajajo zelo visoke napetosti in dolge električne oblake (iskre) podobne naravnim strelam. Teslov transformator je običajno dosti manjši od valovne dolžine  $h \ll \lambda \approx 10 \text{ km}$ , kar natančno ustreza opisu točkastega dinamičnega električnega dipola. Zaradi tega Teslov transformator ni učinkovit sevalec. Sevalna upornost znaša v opisanem primeru komaj  $R_s \approx 0.0071 \Omega = 7.1 \text{ m}\Omega$ .

Če ocenimo kapacitivnost sekundarnega nihajnega kroga na  $C \approx 300 \text{ pF}$  in upoštevamo, da kakovost tuljave  $L$  iz bakrene žice brez feromagnetnega jedra ne more preseči vrednosti  $Q \approx 300$ , znaša upornost bakrenega navitja tuljave  $R_{Cu} \approx 58.9 \Omega$ . Razmerje med izsevano močjo in celotno močjo, ki jo dovajamo sekundarnemu  $LC$  nihajnemu krogu, imenujemo sevalni izkoristek. V opisanem primeru Teslovega transformatorja je sevalni izkoristek zelo slab, komaj  $\eta \approx 0.00012$ .

Če je Nikola Tesla hotel izsevati  $P = 1 \text{ W}$  moči, je potreboval v sekundarnem navitju transformatorja vsaj  $P_2 = 8 \text{ kW}$  visokofrekvenčne moči. Z upoštevanjem izgub v primarnem nihajnem krogu  $L_p C_p$  in izkoristka pretvorbe nizkofrekvenčne moči v visokofrekvenčno moč v iskrišču je potreboval Nikola Tesla več sto  $\text{kW}$  nizkofrekvenčne moči!

Pri frekvenci Teslovega transformatorja  $f \approx 30 \text{ kHz}$  so sevanje, dinamična člena in statična člena električnega polja  $\vec{E}(\vec{r})$  istega velikostnega razreda na razdalji:

$$r = \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi} \approx 1.59 \text{ km}$$

Po razpoložljivih podatkih je Nikola Tesla izvedel večino poskusov v bližnji okolici svojega transformatorja, kjer prevladujeta statično električno in magnetno polje. Razlik med statiko in sevanjem verjetno sploh ni opazil, saj je iskal predvsem čim večje električno polje v neposredni bližini naprave. V nobenem primeru Nikola Tesla ni mogel izmeriti sevalne upornosti  $R_s$ , saj je bila za štiri velikostne razrede ali celo večkrat manjša od izgub  $R_{Cu}$  v navitjih njegovih transformatorjev.

Sevanje Teslovega transformatorja je neučinkovito, ker je naprava zelo majhna  $h \ll \lambda \approx 10 \text{ km}$  v primerjavi z valovno dolžino. Guglielmo Marconi je s številnimi poskusi pravilno ugotovil, da sevanje Teslovega transformatorja narašča predvsem z višanjem droga  $h$  oziroma večanjem dolžine žice, ki je nanj priključena. Marconi je učinkovitejšo sevalno napravo poimenoval »antena« po latinskem izrazu za tipalke žuželk podobnih oblik in z njo vzpostavil prvo prekooceansko radijsko zvezo leta 1901.

\* \* \* \* \*